Вычисление экстремума функции изгибающего момента в балках

Поиск экстремума функции M_x является первым этапом расчета балки на прочность. Координата экстремума – координата одного из возможных опасных сечений, а величина экстремума – момент в этом сечении. Существуют по меньшей мере три способа вычисления экстремума.

Первый – чисто аналитический. Записываются функции Q_y и M_x, первая из них приравнивается нулю. Если корень уравнения лежит в пределах участка, получаем координату опасного сечения z^* и подставляем в функцию момента – так вычисляется экстремальный момент M^*.

Второй – чисто графический. Строится эпюра Q_y, площадь которой дает момент M^*, а координата вычисляется из подобия треугольников.

Рассмотрим пример (Рис. 1, *а*). Сначала определим реакции (этот этап необходим в любом случае). Получаем $\frac{4}{3}ql$ и $\frac{2}{3}ql$ (здесь и далее положительное направление реакций – вверх). Потом найдем экстремум первым способом. Записываем функции Q_y и M_x:

$$Q_y = \frac{4}{3}ql - qz; \qquad M_x = \frac{4}{3}qlz - q\frac{z^2}{2} \tag{1}$$

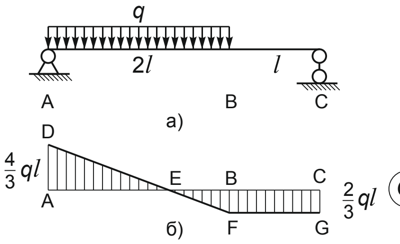

Рис. 1

В дальнейшем условимся все выкладки производить в безразмерном виде, то есть выражать координаты в долях l, силы в долях ql, моменты – ql^2. Тогда формулы (1) примут вид

$$Q_y = \frac{4}{3} - z; \qquad M_x = \frac{4}{3}z - \frac{z^2}{2}$$

Обычным образом исследуя функцию M_x на экстремум, находим

$$z^* = \frac{4}{3}; \quad M^* = \frac{8}{9}$$

Для второго способа потребуется эпюра Q_y (Рис. 1, *б*). Площадь треугольника слева от координаты экстремума (точки E) равна

$$\Omega_{ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} \tag{2}$$

Площадь фигуры справа от E

$$\Omega_{ECGF} = \Omega_{BEF} + \Omega_{BCGF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{18} + \frac{12}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} \tag{3}$$

Ту же площадь можно найти как площадь трапеции:

$$\Omega_{ECGF} = \frac{1}{2}(CE + FG)CG = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1 + \frac{2}{3}\right) + 1\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{3} = \frac{8}{9} \tag{4}$$

Расчет по формуле (2), очевидно, проще, чем по формулам (3) или (4). Таков второй способ.

Общий недостаток обоих, с нашей точки зрения, состоит в неоправданно больших затратах времени и сил на их воплощение. При решении задач низкой и средней сложности (а именно они составляют большинство в учебном процессе), и при наличии элементарных навыков построения эпюр и устного счета задача расчета на прочность при изгибе решается так: вначале быстро строится эпюра моментов, затем определяется наличие экстремума, и наконец, в случае его наличия, ищется экстремальный момент. Ни построения эпюры сил, ни, тем более, запись уравнений не только не нужны, но и выглядят лишними.

Суть третьего способа, который можно назвать графоаналитическим, состоит в применении метода сечений (графическая часть) и в арифметических операциях с простыми дробями (аналитическая часть). И то, и другое желательно выполнять мысленно или, в крайнем случае, с помощью быстрого наброска. Также, возможно, понадобится калькулятор. Причем важно, чтобы он умел работать с простыми дробями.

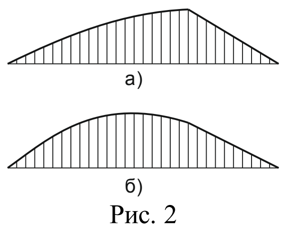

Рис. 2

Сначала обозначим левую реакцию через r, в данном случае $r = \frac{4}{3}$. Очевидно, что эпюра моментов может иметь вид Рис. 2, *а* (без экстремума) или Рис. 2, *б* (с ним). Решение этого вопроса достигается простым сравнением левой реакции и произведения интенсивности распределенной нагрузки на длину участка AB ($1\cdot 2 = 2$). Очевидно, что, испытав в точке A скачок вдоль реакции, то есть вверх, эпюра сил начнет линейно убывать. Поскольку $r < 2$, эпюра «успеет» до конца участка пересечь ось и, значит, экстремум будет в точке пересечения оси (Рис. 2, *б*). Далее, отсекаем некий участок (длина его пока неизвестна) от левого конца. Поскольку в точке экстремума $Q_y = 0$, из суммы проекций на вертикаль ясно, что длина отсеченного участка должна быть численно равна реакции и составлять также r (Рис. 3). Осталось найти M^*:

$$M^* = r \cdot r - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \tag{5}$$

Далее расчет выполняется по формуле (2). Задача решена.

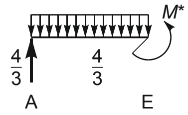

Рис. 3

Выражение, равное половине квадрата реакции, мы будем в дальнейшем называть полуквадратом. Обратим внимание, что в формуле (5) полуквадрат фигурирует дважды: как момент от распределенной нагрузки на ее границе, и как результат расчета. Таким образом, вместо двух слагаемых имеем одно. Следовательно, если экстремум около опоры, свободной от момента, существует, то он численно равен полуквадрату реакции, а координата опасного сечения – самой реакции.

С точки зрения второго способа полуквадрат есть просто площадь прямоугольного треугольника с равными катетами (2). Однако третьим способом задача решена без рисунков и формул, в уме, за считанные секунды.

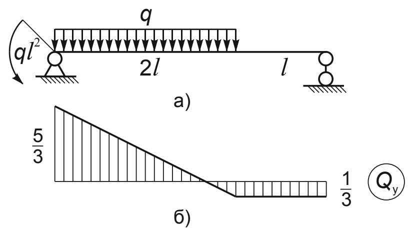

Рис. 4

Усложним задачу, добавив момент в точке A (Рис. 4, *а*). Расчет вторым способом по площади эпюры Q_y (Рис. 4, *б*) <u>слева</u> от опасного сечения даст результат $M^* = \frac{25}{18}$, что неверно. В самом деле,

$$M^* = \int_0^{z^*} Q_y dz + M_0,$$

где M_0 – момент в точке A. В данном случае момент, сжимающий нижние слои, должен входить с минусом:

$$M^* = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{25}{18} - 1 = \frac{7}{18}$$

К тому же результату приводит подсчет площади фигуры <u>справа</u> от опасного сечения. Таким образом, приходится либо заботиться о том, чтобы между опасным сечением и концом балки не было сосредоточенных моментов, либо делать расчет по более сложной формуле. То есть необходимо не только строить эпюру сил, но и смотреть и на нее, и на расчетную схему. Внимание рассеивается, вероятность ошибки растет.

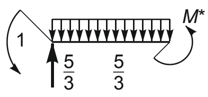

Рис. 5

Для расчета по третьему способу имеем весьма простой рисунок (Рис. 5), приводящий к тому же результату. Таким образом, поиск величины экстремума для балки с сосредоточенными моментами не так уж сложен – надо найти его величину без учета моментов, а затем <u>вычесть</u> суммарный момент (если он сжимает <u>те же</u> слои, что и распределенная нагрузка) или <u>прибавить</u> (если <u>противоположные</u>).

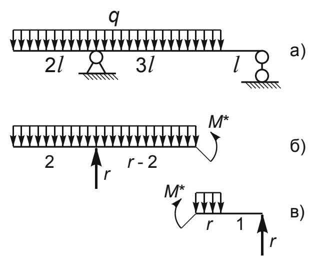

Рис. 6

Рассмотрим еще более сложную расчетную схему – балку со свесом, то есть со свободным концом, не подпертым шарниром (Рис. 6, *а*). Реакции равны: левая $r = \frac{35}{8}$, правая $\frac{5}{8}$. Оценивать наличие экстремума проще не с левого, а с правого конца, убедившись, что $\frac{5}{8} < 3$. Координата опасного сечения, считая слева, как обычно, равна r. Однако, по сравнению с предыдущими примерами, здесь расстояние от опоры (и, следовательно, плечо силы r) до опасного сечения равно не r, а $(r - 2)$. Получаем Рис. 6, *б* и расчет экстремального момента:

$$M^* = -\frac{r^2}{2} + r(r-2) = -\frac{r^2}{2} + r^2 - 2r = \frac{r^2}{2} - 2r \qquad \text{или} \qquad M^* = r\left(\frac{r}{2} - 2\right)$$

По какой из формул удобнее считать – не столь важно, лишь бы получилось $\frac{105}{128}$. Первая формула показывает, что изначально полуквадрат все равно присутствует. В обоих случаях вряд ли удастся обойтись без помощи калькулятора.

Поиск экстремального момента от правой опоры балки (Рис. 6, *в*) еще проще, и даже калькулятор не требуется. Отсчитывая координату от правого конца и полагая $r = \frac{5}{8}$, имеем:

$$M^* = -\frac{r^2}{2} + r(r+1) = -\frac{r^2}{2} + r^2 + r = \frac{r^2}{2} + r = \frac{25}{128} + \frac{5}{8} = \frac{105}{128}$$

Так что при выборе стороны, с которой следует искать экстремум, можно исходить из вычислительных соображений: «5» выглядит в этом смысле гораздо лучше, чем «35».

Напоследок решим достаточно сложную задачу (Рис. 7). Сложность заключается в том, во-первых, что одна из длин и сила – нецелые числа в долях l и ql, соответственно. Во-вторых, на эпюре будет не один, а два экстремума.

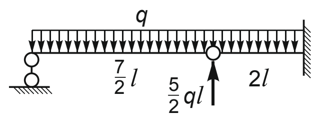

Рис. 7

Вначале из суммы моментов слева от шарнира найдем, что реакция опоры равна $\frac{7}{4}$, что тут же дает координату первого экстремума и его величину, равную, разумеется, полуквадрату реакции, то есть $\frac{49}{32}$. Далее, из суммы на вертикаль находим силу в заделке: $\frac{5}{4}$. Значит, такова координата второго экстремума, если считать справа, или $\frac{7}{2}+2-\frac{5}{4}=\frac{17}{4}$, если считать слева. Наконец, сумма моментов справа от шарнира позволяет определить момент в заделке: $-\frac{1}{2}$, то есть сжаты нижние слои. Получается, что момент и распределенная нагрузка сжимают слои с <u>одной</u> стороны и, следовательно, должны войти с <u>разными</u> знаками, а именно:

$$M^*=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{25}{32}-\frac{16}{32}=\frac{9}{32}$$