«Метод Шарабуровой»
(частный случай вычисления интеграла Мора)

С. В. Шарабурова
Фотография из открытых источников

Идея данного метода была предложена студенткой кафедры МТ4 Светланой Шарабуровой (2008-2009 уч. г.). Мне осталось лишь распространить его на более общий случай и снабдить подробным выводом.

Речь идет о перемножения эпюр, когда первая из них имеет форму «домика», при этом вторая, разумеется, должна быть линейной в пределах участка. Эпюра «домиком», например, характерна для нагружения шарнирно опертой балки сосредоточенной силой. Рассмотрим самый общий случай второй линейной эпюры, то есть трапецию (Рис. 1).

Традиционно принято разбивать вторую эпюру на две трапеции и дважды перемножать на них треугольники. Светлана предложила заменить два слагаемых одним, найдя площадь и осевую координату центра тяжести первой эпюры, а также высоту второй под указанным центром, и перемножить их.

Сперва выполним расчет традиционным способом, для чего потребуется найти высоту y_2 трапеции под «коньком» первой эпюры. Для этого направим локальную ось y, как показано на Рис. 1, и выведем уравнение прямой, описывающей вторую эпюру:

$$y(z) = k \cdot z + f;$$

при $z = -a$ $\quad y = d;$

при $z = b$ $\quad y = e$

откуда после несложных преобразований следует

$$k = \frac{e-d}{a+b}; \qquad f = \frac{bd+ae}{a+b} \rightarrow y(z) = \frac{(e-d)\cdot z + bd + ae}{a+b} \tag{1}$$

$$y_2 = y(0) = \frac{bd+ae}{a+b}$$

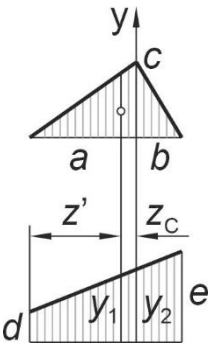

Рис. 1

Тогда умножение эпюр методом Мюллера-Бреслау будет иметь общий вид

$$EI_x\delta = \frac{a}{6}c\left(2y_2 + d\right) + \frac{b}{6}c\left(2y_2 + e\right)$$

Теперь преобразования оказываются куда более утомительными и приводят к громоздкой формуле

$$EI_x\delta = \frac{c}{6}\frac{3abd + 2a^2e + a^2d + 2b^2d + 3abe + b^2e}{a+b}$$

Выполняя деление числителя на знаменатель «в столбик», получаем гораздо более компактное и легко запоминаемое выражение

$$\boxed{EI_x\delta = \frac{c}{6}\left[e(2a+b) + d(2b+a)\right]} \tag{2}$$

Теперь, согласно методу Шарабуровой, найдем центр тяжести «домика» (обозначен кружочком на Рис. 1):

$$A = \frac{1}{2}c(a+b); \qquad S_y = \frac{1}{6}c\left(b^2 - a^2\right); \qquad z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{b-a}{3}$$

Высота трапеции под центром тяжести согласно формуле (1)

$$y_1 = y(z_C) = \frac{be + 2bd + 2ae + ad}{3(a+b)}$$

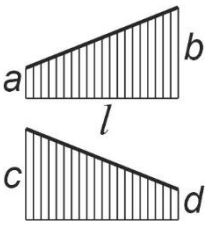

Рис. 2

И, наконец, по методу Верещагина имеем

$$EI_x\delta = A \cdot y_1 = \frac{c}{6}\left[e(2a+b) + d(2b+a)\right]$$

что совпадает с формулой (2).

Интересно заметить, что формула (2) очень похожа на формулу Мюллера-Бреслау. В самом деле, для перемножения двух трапеций Рис. 2 получаем

$$EI_x\delta = \frac{l}{6}\left[c(2a+b) + d(2b+a)\right]$$

Три отличия состоят в том, что, во-первых, в формуле Шарабуровой (2) в круглых скобках – не ординаты, а абсциссы, во-вторых, за скобкой – не длина участка, а высота «конька», и, наконец, в-третьих, удваивается не соответствующий, «свой», а «чужой» размер, то есть, иными словами, перемножение с двойкой выполняется «крест-накрест».

В частном случае, если вторая эпюра является треугольником, из формулы (2) при $e = 0$ следует

$$EI_x\delta = \frac{cd}{6}(2b + a)$$

Обычно «домик» приходится перемножать именно на треугольник, например, если требуется найти угол поворота касательной над опорой шарнирно опертой балки, нагруженной сосредоточенной силой. Для прямоугольника ($e = d$) получаем

$$EI_x\delta = \frac{cd}{6}\left(2a + b + 2b + a\right) = \frac{cd}{2}(a + b) = A \cdot d$$

В завершение необходимо отметить, что, во-первых, ничего принципиально нового в методе Шарабуровой нет: формулу (2) достаточно получить один раз – безразлично, каким именно способом – и при необходимости использовать, однако путь Светланы отличается простотой и изяществом.

Во-вторых, сама необходимость перемножать эпюру «домиком» на линейную эпюру возникает не так уж часто.