

Применение принципа наименьшей работы

Рассмотрим симметричную ферму Рис. 1, а. Необходимо найти усилия в стержнях.

По первому впечатлению задача не выглядит сложной. Отбросив связи и заменив их реакциями (Рис. 1, б), видим, что, согласно симметрии, в тросах 4 и 5 будет одно усилие (обозначим его N), в тросах 2 и 3 – другое (N'). Еще по одному усилию действуют в вертикальной (N_1) и горизонтальной (N_6) тросах. Таким образом, имеем четыре неизвестных: N , N' , N_1 и N_6 . Теперь подсчитаем уравнения: по одной проекции на вертикаль для двух средних узлов и два уравнения для любого из боковых узлов – всего четыре уравнения. Таким образом, задача является статически определимой.

Обозначив $\beta = 30^\circ$, получаем из Рис. 2, а:

$$\Sigma F_b = -N_6 \sin \beta + N \sin \beta = 0 \rightarrow N_6 = N$$

$$\Sigma F_a = -N' - 2N \cos \beta = 0 \rightarrow N' = -2N \cos \beta \quad (1)$$

Из Рис. 2, б и в следует, соответственно:

$$2N' \cos 2\beta - F - N_1 = 0 \rightarrow N_1 = 2N' \cos 2\beta - F \quad (2)$$

$$2N \cos \beta + N_1 + F = 0 \rightarrow N_1 = -2N \cos \beta - F \quad (3)$$

Из уравнений (1)-(3) выводим:

$$-4N \cos \beta \cos 2\beta - F = -2N \cos \beta - F \rightarrow 2 \cos 2\beta = 1 \rightarrow 2 \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Полученное тождество говорит о том, что из четырех уравнений равновесия одно является линейной комбинацией других. Таким образом, на четыре неизвестных приходится три уравнения, и наш вывод о статической определимости конструкции оказывается ошибочным.

В самом деле, если мыслить ферму как раму, то внешне она статически определима, содержит 3 замкнутых контура и 4 шарнира по три стержня, сходящихся в каждом. Тогда внутренняя степень статической неопределимости находится обычным образом: $3 \cdot 3 - 4 \cdot (3 - 1) = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$.

К тому же выводу можно прийти и другим способом, отбрасывая тросы одну за другой и ожидая превращения конструкции в кинематически изменяемую. Это произойдет, если убрать две любые тросы, например, 1 и 2 (Рис. 3). Значит, изначально ферма была единожды статически неопределима.

Выберем кинематическую схему, полагая все тросы удлинившимися (Рис. 4). Это соответствует Рис. 2, где все усилия показаны растягивающими. Здесь и далее бледными линиями показано положение до, а жирными – после нагружения.

Необходимо рассмотреть положение верхнего правого узла и записать зависимость между удлинениями тросов под номерами 2, 4 и 6. Но мы поступим проще, рассмотрев только второй и шестой стержни и не обращая внимания на четвертый (Рис. 5, а).

Однако, как видно из кинематической схемы, перемещение узла С в случае второй тросы происходит не только благодаря ее растяжению, но и вследствие ее перемещения вверх как жесткого целого на величину удлинения первой тросы, то есть

$$BH = \Delta l_1 + BD + DH; \text{ из } \triangle BCD \rightarrow BD = \Delta l_6 \cdot \operatorname{tg} \beta, CD = \frac{\Delta l_6}{\cos \beta};$$

$$\text{из } \triangle DGH \rightarrow DH = \frac{DG}{\sin \beta} = \frac{CG - CD}{\sin \beta} = \frac{\Delta l_2 - \frac{\Delta l_6}{\cos \beta}}{\sin \beta}. \text{ Окончательно}$$

$$BH = \Delta l_1 + \Delta l_6 \operatorname{tg} \beta + \frac{\Delta l_2 - \frac{\Delta l_6}{\cos \beta}}{\sin \beta} \quad (4)$$

Трос 4 не перемещается, а только удлиняется, поэтому, не учитывая удлинение первой тросы, в формуле (4) нужно заменить индекс 2 на 4, а угол β на угол 2β :

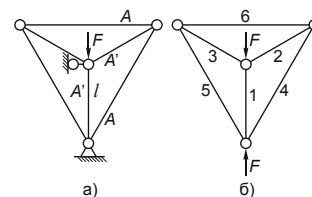


Рис. 1

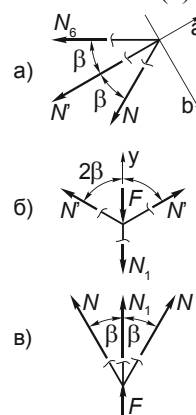


Рис. 2

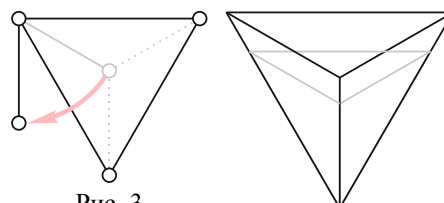


Рис. 3

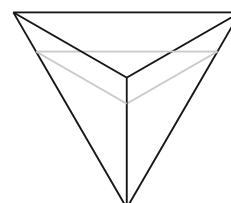


Рис. 4

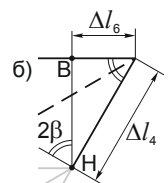
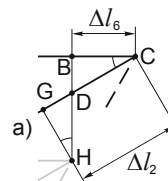


Рис. 5

$$BH = \Delta l_6 \operatorname{tg} 2\beta + \frac{\Delta l_4 - \frac{\Delta l_6}{\cos 2\beta}}{\sin 2\beta}$$

Приравнявая правые части, получаем уравнение совместности перемещений

$$\Delta l_1 + \Delta l_6 \operatorname{tg} \beta + \frac{\Delta l_2 - \frac{\Delta l_6}{\cos \beta}}{\sin \beta} = \Delta l_6 \operatorname{tg} 2\beta + \frac{\Delta l_4 - \frac{\Delta l_6}{\cos 2\beta}}{\sin 2\beta} \quad (5)$$

Длины внутренних тяг 1-3 равны l , а длины внешних тяг 4-6 можно найти по формуле для стороны правильного n -угольника в зависимости от радиуса l описанной окружности: $2l \cdot \sin \frac{\pi}{n}$. Для случая $n = 3$ получаем

$$l_6 = 2l \sin \frac{\pi}{3} = l\sqrt{3}$$

При записи зависимостей удлинений от сил нужно не упустить из виду, что величина, показанная на Рис. 5 и обозначенная через Δl_6 , представляет собой не полное удлинение шестой тяги, а только его половину, потому что мы рассматриваем лишь правый узел. Следовательно, поскольку и усилие в тягах 4-6 одинаковое и равно N , и длины их также равны, то можно принять, что

$$\Delta l_4 = 2\Delta l_6 \quad (6)$$

$$\Delta l_6 = \frac{1}{2} \frac{N \cdot l \sqrt{3}}{EA}; \quad \Delta l_4 = 2\Delta l_6 = \frac{N \cdot l \sqrt{3}}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N' l}{EA'} = -\frac{2N \cos \beta \cdot l}{EA'}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA'} = -\frac{(2N \cos \beta + F) l}{EA'} \quad (7)$$

При подстановке удлинений в формулу (5) заменяем тригонометрические функции их значениями:

$$-\frac{\left(2N \frac{\sqrt{3}}{2} + F\right) l}{EA'} + \frac{1}{2} \frac{N \cdot l \sqrt{3}}{EA} \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \left(-\frac{2N \frac{\sqrt{3}}{2} l}{EA'} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \frac{N \cdot l \sqrt{3}}{EA} \right) = \frac{1}{2} \frac{N \cdot l \sqrt{3}}{EA} \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{N \cdot l \sqrt{3}}{EA} - 2 \frac{1}{2} \frac{N \cdot l \sqrt{3}}{EA} \right)$$

Обратим внимание на то, что последнее слагаемое в формуле (5) оказалось равным нулю. Оно соответствует расстоянию ДН на Рис. 5, б, то есть точки Д и Н отождествились. Таково следствие одинакового удлинения внешних тяг (6). То есть тяги 4 и 5 не только не перемещаются, но и не поворачиваются.

Далее получаем, сокращая на отличный от нуля множитель $\frac{l}{E}$

$$-\frac{(N\sqrt{3} + F)}{A'} + \frac{1}{2} \frac{N}{A} - 2 \left(\frac{N\sqrt{3}}{A'} + \frac{N}{A} \right) = \frac{3}{2} \frac{N}{A} \rightarrow N \left(\frac{1}{2} - 2 - \frac{3}{2} + \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{A'} \right) = \frac{F}{A'} \rightarrow N \left(\frac{3}{A} + \frac{3\sqrt{3}}{A'} \right) = -\frac{F}{A'}$$

И, окончательно:

$$N = -F \frac{1}{3 \left(\frac{A'}{A} + \sqrt{3} \right)} \quad (8)$$

Для энергетической проверки рассмотрим частный случай $A = A'$. Тогда из формул (8), (1) и (3) получаем, соответственно

$$N = -F \frac{1}{3(1 + \sqrt{3})} \approx -0.122F \quad (\text{сжатие});$$

$$N' = -2N \frac{\sqrt{3}}{2} = -N\sqrt{3} \approx 0.211F \quad (\text{растяжение});$$

$$N_1 = -N\sqrt{3} - F \approx -0.789F \quad (\text{сжатие});$$

Перемещение точки приложения силы равно по модулю удлинению первой тяги, то есть, согласно формуле (7)

$$\Delta l_1 = 0.789 \frac{Fl}{EA}$$

$$U = \frac{1}{2} \left(3 \frac{N^2 l \sqrt{3}}{EA} + 2 \frac{N^2 l}{EA} + \frac{N_1^2 l}{EA} \right) = \frac{F^2 l}{2EA} (3\sqrt{3} \cdot 0.122^2 + 2 \cdot 0.211^2 + 0.789^2) = 0.394 \frac{F^2 l}{EA}$$

$$W = \frac{1}{2} F \cdot 0.789 \frac{Fl}{EA} = 0.394 \frac{F^2 l}{EA}$$

Энергетическая проверка сошлась.

Теперь рассмотрим ферму, состоящую из $n > 3$ одинаковых тяг, далее именуемых спицами и имеющих общий шарнирный узел. Концы спиц шарнирно соединены другими тягами, образующими обод (Рис. 6).

К данной расчетной схеме могут быть сведены некоторые так называемые металлоэластичные (металлоупругие) колеса, которые разрабатываются в основном для планетоходов, то есть транспортных средств, предназначенных для перемещения по поверхности иных небесных тел.

Планетоходы имеют ряд коренных отличий от обычных земных колесных машин. Например, использование резины и пластмасс исключено из-за их чувствительности к экстремально высоким и низким температурам.

Пневматические шины также малопригодны – накачивать их просто нечем. Остается металл. Но при этом следует учесть, во-первых, что колесо следует делать максимально легким. Во-вторых, скорость движения по другим планетам не должна быть высокой, скорее наоборот. В-третьих, поверхность планет всегда очень неровная, а зачастую вязкая, напоминающая пыль или мелкий песок с вкраплением камней разного размера.

На Рис. 7 показаны некоторые металлоупругие колеса. В основном они являются либо опытными образцами, либо только концептами, не воплощенными в металле.

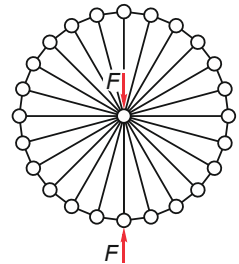


Рис. 6

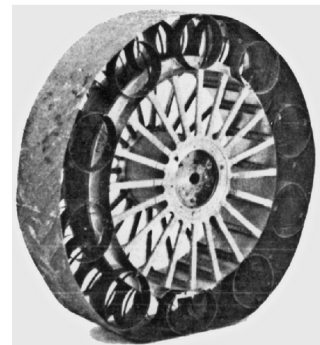
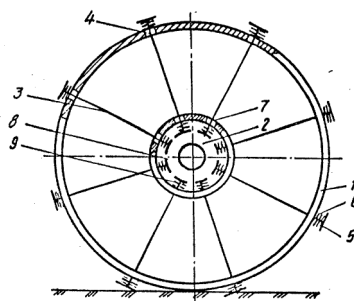
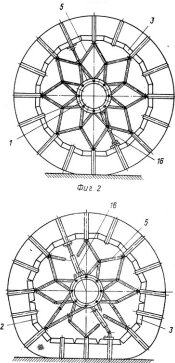
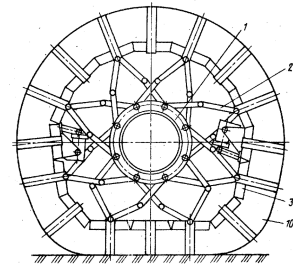
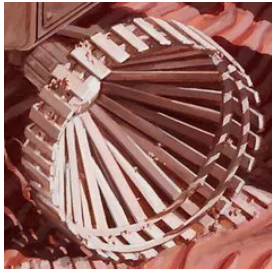


Рис. 7

Степень статической неопределимости колеса на Рис. 6 вычисляется тем же самым способом: число замкнутых контуров равно n , в каждом из n узлов на ободе сходятся по 3 тяги, и в центральном узле – n тяг: $3 \cdot n - n \cdot (3 - 1) - (n - 1) = 3 \cdot n - 2 \cdot n - n + 1 = 1$.

Можно рассуждать иначе: врежем шарнир в любой из стержней обода и соединим его спицей с центром. Тогда, с одной стороны, число замкнутых контуров увеличится на единицу и добавит 3 степени статической неопределимости. С другой стороны, в центральном шарнире число тяг возрастет на единицу и снимет одну степень, а в новом врезанном шарнире, где пересекаются три тяги, снимутся еще две степени. То есть степень статической неопределимости всей конструкции не изменится ($3 - 2 - 1 = 0$). Взяв за основу рассмотренную ранее конструкцию с $n = 3$ (Рис. 1) и добавляя к ней шарниры на ободе и спицы, мы можем получить колесо с любым числом спиц.

Разумеется, задача может быть решена тем же методом, то есть через уравнение совместности перемещений. Но другой метод оказывается гораздо более простым и эффективным, к тому же при неопределенном числе n .

Метод основан на, как раньше говорили, начале наименьшей работы. Теперь используют термин «принцип наименьшей работы» или «принцип минимума потенциальной энергии». В некоторых источниках [1] используется также термин «теорема Менабреа», в честь итальянского военного инженера Л. Ф. Менабреа (1809-1896), впервые применившего такой метод для расчета ферм.

В его философской основе лежит закон, метафорически сформулированный Леонардом Эйлером: «Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума».

В приложении к данной конструкции принцип наименьшей работы звучит так: из всех возможных значений усилия в стержне конструкция выбирает то, которое доставляет минимум ее потенциальной энергии.

Следовательно, последняя записывается в зависимости от одного из неизвестных усилий (вообще говоря, любого). Затем производная энергии по усилию приравняется нулю и из полученного уравнения усилие определяется. Выберем в качестве аргумента усилие N в стержне обода и рассмотрим один из контуров (Рис. 8):

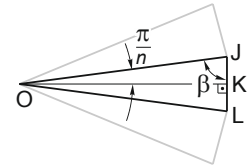


Рис. 8

$$\angle JOL = \frac{2\pi}{n}; \quad \angle JOK = \frac{\angle JOL}{2} = \frac{\pi}{n}; \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}; \quad \cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \sin \frac{\pi}{n}$$

Введя обозначение $s = \sin \frac{\pi}{n}$, из формул (1) и (3) получаем, соответственно

$$N' = -2N \sin \frac{\pi}{n} = -2N \cdot s; \quad N_1 = -2N \sin \frac{\pi}{n} - F = -2N \cdot s - F$$

Под N_1 следует понимать усилие в нижней спице, а под N' – во всех $(n - 1)$ остальных.

Тогда потенциальная энергия деформации будет равна

$$\begin{aligned} U &= \frac{n \cdot N^2 2l \cdot s}{2EA} + \frac{N_1^2 l}{2EA'} + (n-1) \frac{N'^2 l}{2EA'} = \frac{l}{2E} \left(\frac{2n \cdot N^2 s}{A} + \frac{(-2N \cdot s - F)^2}{A'} + (n-1) \frac{(-2N \cdot s)^2}{A'} \right) = \\ &= \frac{l}{2E} \left(\frac{2n \cdot N^2 s}{A} + \frac{4N^2 s^2 + 4N \cdot F \cdot s + F^2 + (n-1) \cdot 4N^2 s^2}{A'} \right) = \\ &= \frac{l}{2E} \left(\frac{2n \cdot N^2 s}{A} + \frac{4n \cdot N^2 s^2 + 4N \cdot F \cdot s + F^2}{A'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial N} &= \frac{l}{2E} \left(4 \frac{n \cdot N}{A} s + \frac{8n \cdot N \cdot s^2 + 4F \cdot s}{A'} \right) = 0 \rightarrow \frac{n \cdot N}{A} + \frac{2n \cdot N \cdot s + F}{A'} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow N \left(\frac{n}{A} + \frac{2n \cdot s}{A'} \right) = -\frac{F}{A'} \rightarrow N = -F \frac{1}{\frac{n \cdot A'}{A} + 2n \cdot s} = -F \frac{1}{\frac{n \cdot A'}{A} + 2n \cdot \sin \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

Произведено сокращение на выражение $\sin \frac{\pi}{n}$, равное нулю только при $n = 1$ и $n = \infty$.

Можно убедиться, что при $n = 3$ мы получаем тот же результат (8), что был получен через уравнение совместности перемещений. Причем высокая трудоемкость первого способа, необходимость изображения сложных рисунков типа Рис. 5, записи громоздких формул наподобие (5) и скрупулезный учет поведения тяг указывают на то, что принцип наименьшей работы в подобных задачах является предпочтительным, хотя и несколько менее наглядным.

Автор выражает благодарность А. М. Наумову за помощь в решении задачи.

[1] Соппротивление материалов, Г. С. Писаренко (ред.), Киев, Вища школа, 1986