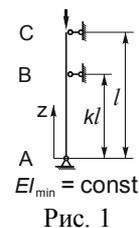
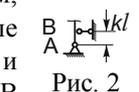


# Влияние положения промежуточного шарнира на критическую силу

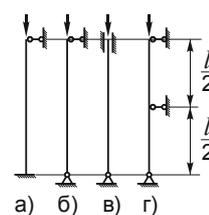
Дана стойка Рис. 1. Необходимо подобрать положение промежуточного шарнира так, чтобы критическая сила достигла наибольшего значения. При прочих равных условиях нужно добиться, чтобы коэффициент приведения длины  $\mu$  оказался минимальным. Здесь и далее нагружение происходит силой на верхнем конце стойки.



Изучим умозрительно некоторые частные значения относительной координаты промежуточного шарнира  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ). Если  $k \rightarrow 0$ , то есть шарнир В приближается к шарниру А (Рис. 2), то поворот сечений между А и В становится все более затрудненным и, следовательно, в пределе вообще невозможным. Таким образом, при сколь угодно малом, но отличном от нуля, параметре  $k$ , сечение А превращается в заделку: линейные перемещения запрещены изначально, а угловое – в силу предельной близости шарниров А и В. Таким образом, получаем стойку Рис. 3, а. Однако если  $k=0$ , то шарниры А и В отождествляются или, что то же самое, шарнир В исчезает, и получаем стойку Эйлера Рис. 3, б.



Следует напомнить решение задачи о критической силе для стойки Рис. 3, а, приведенное в [1]. Решение методом Эйлера (статическим методом) приводит к трансцендентному уравнению  $\text{tg } kl = kl$ , решаемому численно, и к коэффициенту приведения длины, равному  $0.699 \approx 0.7$ .



Решим ту же задачу энергетическим методом (методом Ритца-Тимошенко). Исходя из всех возможных граничных условий

$$1) v(0) = 0; \quad 2) v'(0) = 0; \quad 3) v(l) = 0; \quad 4) v''(l) = 0$$

выбираем многочлен четвертого порядка, находим его коэффициенты и получаем функцию прогиба с точностью до постоянного множителя (здесь и далее) в виде:

$$v_1(z) = \frac{3}{2}z^2 - \frac{5}{2}z^3 + z^4 \tag{1}$$

Коэффициент приведения длины для данной функции равен 0.686, то есть имеет, во-первых, заниженное значение (и, следовательно, завышенную критическую силу, как и должен давать приближенный энергетический метод) по сравнению с результатом решения по Эйлеру, а во-вторых, вполне приемлемую погрешность 1.9%.

Второе частное значение  $k$  для стойки Рис. 1 есть  $k \rightarrow 1$ , что приводит к расчетной схеме Рис. 3, в, полностью идентичной стойке Рис. 3, а.

Наконец, третий частный случай  $k = \frac{1}{2}$ . Получаем стойку Рис. 3, г, состоящую из двух одинаковых стоек Эйлера вдвое меньшей длины. Нетрудно видеть, что здесь  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Таким образом, при плавном изменении  $k$  в пределах  $0 \dots \frac{1}{2}$  коэффициент приведения длины будет уменьшаться с 0.7 до 0.5 и затем увеличиваться по симметричному (четному) закону. Наиболее выгодным с точки зрения наибольшей критической силы будет именно среднее положение шарнира. Впрочем, такой вывод можно было сделать изначально, хотя бы из соображений симметрии. Разница между числами 0.5 и 0.7 менее чем в полтора раза приводит в итоге к почти двукратному (поскольку  $0.7^2 \approx 2 \cdot 0.5^2$ ) изменению критической силы!

Осталось доказать все вышесказанное расчетом.

Для стойки Рис. 1 граничных условий будет пять:

$$1) v(0) = 0; \quad 2) v''(0) = 0; \quad 3) v(kl) = 0; \quad 4) v(l) = 0 \quad 5) v''(l) = 0$$

Решение задачи методом Эйлера в общем виде, то есть с неизвестной переменной  $k$ , приводит к необходимости записывать условие равенства нулю определителя пятого порядка. Таким образом, во избежание чудовищной сложности решения (с возможным, а скорее, неизбежным, привлечением численных приемов) будем искать функцию прогибов энергетическим методом.

Функция будет иметь вид

$$v_2(z) = \frac{1}{3(k^3 - 2k^2 + 1)} \left[ (-3k^2 + 7k - 4)k^2z + 2(3k^4 - 5k^3 + 2)z^3 + (-3k^4 + 10k^2 - 7)z^4 + z^5 \right] \tag{2}$$

откуда для частного случая  $k = 0$  получаем функцию

$$v_2(z) = \frac{4}{3}z^3 - \frac{7}{3}z^4 + z^5 \quad (3)$$

которая, как видно, совершенно не соответствует функции (1). Их графическое сравнение будет дано ниже.

Еще одним недостатком полученной функции (2) является другой частный случай  $k = 1$ : все четыре выражения в круглых скобках обращаются в нуль. После деления их всех на выражение  $(k - 1)$  получаем несколько более простую функцию

$$v_2(z) = \frac{1}{3(k^2 - k - 1)} \left[ (-3k + 4)k^2z + 2(3k^3 - 2k^2 - 2k - 2)z^3 + (-3k^3 - 3k^2 + 7k + 7)z^4 + z^5 \right] \quad (4)$$

Впрочем, данное упрощение все равно приводит к очень громоздким расчетам. Приведем лишь основные выводы.

Коэффициент приведения длины при  $k = 0$  и при  $k = 1$  равен 0.641, что соответствует погрешности уже 8.3% по сравнению с точным значением 0.7 для стойки Рис. 3, а. При  $k = \frac{1}{2}$  получаем  $\mu = 0.497$  вместо 0.5 (погрешность 0.64%, стойка Рис. 3, з). Упругие оси стоек Рис. 3, а и Рис. 1 при  $k = 0$  показаны на Рис. 4.

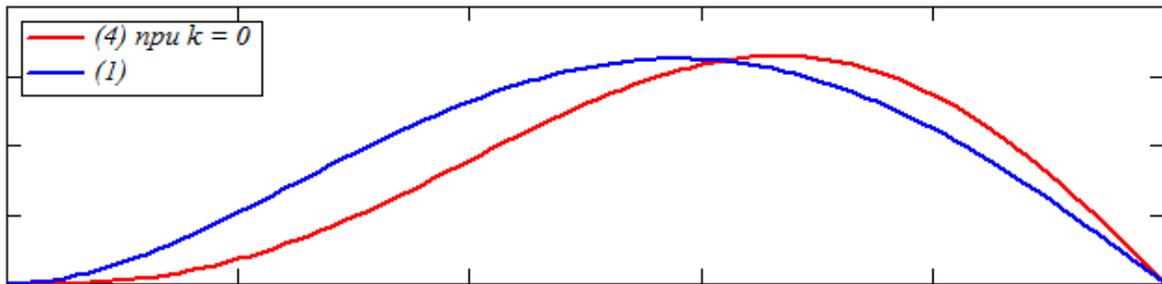


Рис. 4

Зато при  $k = \frac{1}{2}$  видим почти точное совпадение полученной функции с синусоидой – Рис. 5.

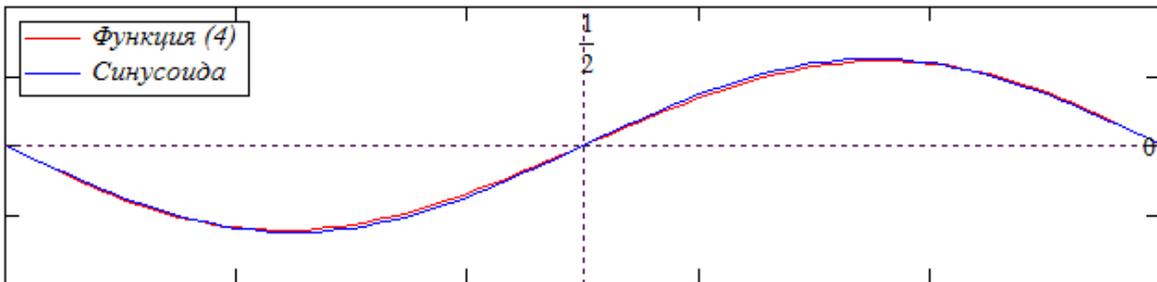


Рис. 5

Зависимость коэффициента приведения длины от  $k$  показана на Рис. 6. Видно, что функция обладает свойством четности.

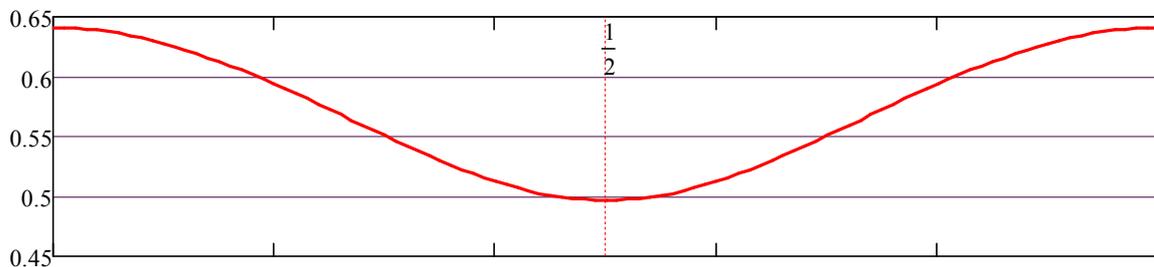


Рис. 6

С. П. Тимошенко [2], основываясь на теории продольно-поперечного изгиба, «методе трех моментов» и табличных данных, дает решение задачи Рис. 1 в частном случае  $k = \frac{1}{3}$ , приводящему к коэффициенту приведения длины, равному 0.543. Погрешность величины  $\mu = 0.537$  по решению (4) относительно решения Тимошенко как более точного составляет всего 1.1%.

Существенный интерес вызывает сравнение функций изгибающего момента, которые для функций прогибов (1) и (4) имеют вид

$$M_1(z) = 1 - 5z + 4z^2 \quad (5)$$

и

$$M_2(k, z) = \frac{1}{k^2 - k - 1} \left[ 6(3k^3 - 2k^2 - 2k - 2)z + 3(-3k^3 - 3k^2 + 7k + 7)z^2 + 5z^3 \right] \quad (6)$$

соответственно (Рис. 7). Можно видеть, что первые два графика обладают свойством косой симметрии: чтобы получить один из них, нужно другой зеркально отразить дважды – относительно средней вертикали и оси абсцисс. Но самое главное: вследствие вышеописанного предельного перехода двух шарниров в заделку получилось, что моменты равны нулю на обоих концах, а на самом деле – только на одном (зеленый, более точный, график).

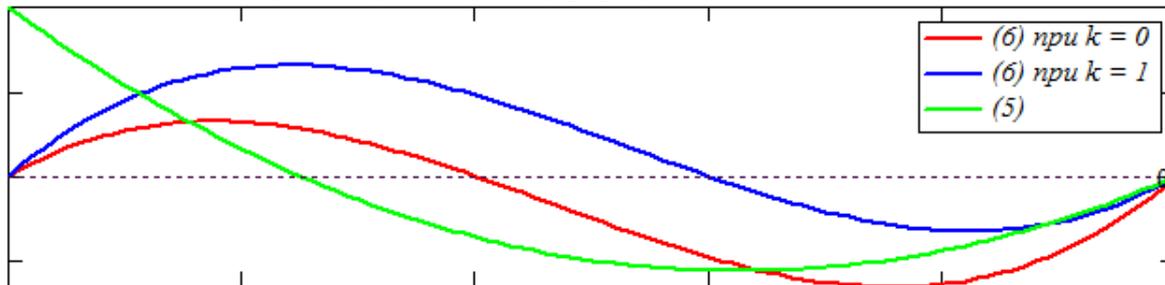


Рис. 7

Теперь рассмотрим другую расчетную схему Рис. 8, а. Здесь уже не удастся сразу точно указать положение промежуточного шарнира, доставляющее минимум коэффициенту приведения длины. Очевидно, что при  $k \rightarrow 0$  шарнир все слабее влияет на поведение стойки и  $\mu \rightarrow 0.7$ , а при  $k \rightarrow 1$  получим в пределе стойку Рис. 8, б с коэффициентом приведения длины  $\mu \rightarrow \frac{1}{2}$ . Осталось узнать поведение функции  $\mu(k)$  в промежуточных точках.

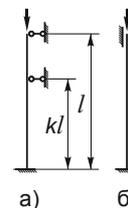


Рис. 8

Граничные условия

$$1) v(0) = 0; \quad 2) v'(0) = 0; \quad 3) v(kl) = 0; \quad 4) v(l) = 0 \quad 5) v''(l) = 0$$

приводят к функции прогиба

$$v_3(z) = \frac{1}{2k-3} \left[ (-3k+4)kz^2 + (5k^2-4k-4)z^3 + (-2k^2-2k+7)z^4 + z^5 \right] \quad (7)$$

Легко показать, что при  $k=0$  функция (7) оказывается тождественной функции (4) и имеет, соответственно, тот же график Рис. 4. То же касается и функции моментов Рис. 7.

При  $k=1$  упругая ось должна представлять собой две полуволны синусоиды с экстремумом при  $z = \frac{l}{2}$ , однако для функции (7) экстремум смещен влево (Рис. 9). Коэффициент приведения длины равен 0.428, то есть погрешность относительно точного значения 0.5 достигает 14.5%.

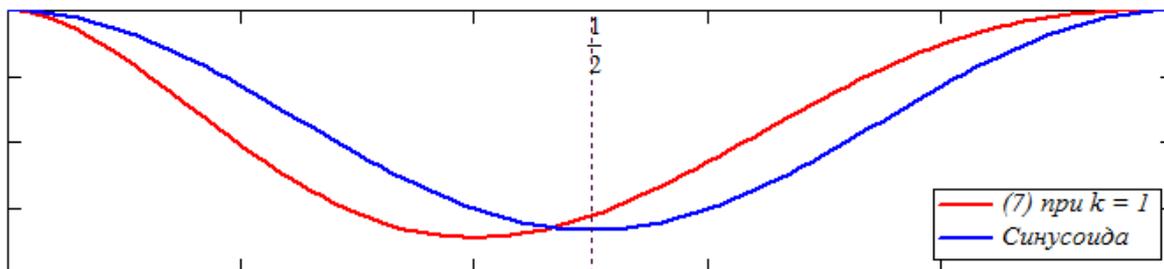


Рис. 9

На Рис. 10 показана зависимость коэффициента приведения длины от относительной координаты промежуточного шарнира. Как и следовало ожидать, при возможности надо размещать шарнир ближе к верхнему концу. Оптимальное положение обеспечивается при  $k = 0.655$ , когда  $\mu$  достигает минимума, равного 0.387. Упругая ось для данного случая показана на Рис. 11.

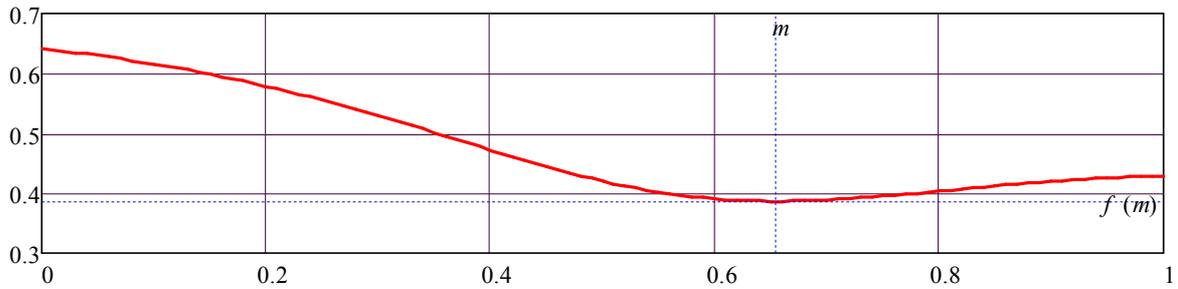


Рис. 10

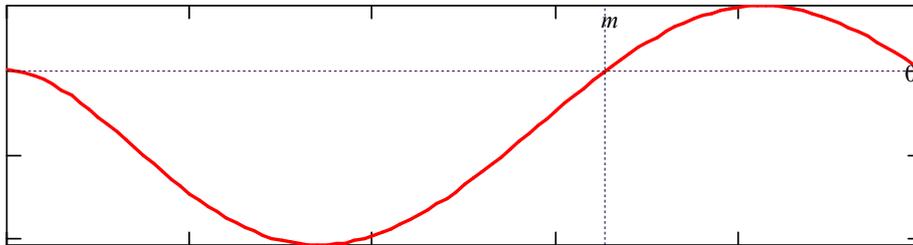


Рис. 11

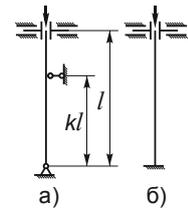


Рис. 12

Наконец, рассмотрим расчетную схему Рис. 12, а. Граничные условия

$$1) v(0) = 0; \quad 2) v''(0) = 0; \quad 3) v(kl) = 0; \quad 4) v'(l) = 0 \quad 5) v'''(l) = 0$$

соответствуют функции прогиба

$$v_4(z) = \frac{1}{k^3 - 4k^2 + 8} \left[ (-8k^2 + 25k - 20)k^2 z + 2(2k^4 - 5k^3 + 10)z^3 + (-k^4 + 10k^2 - 25)z^4 + z^5 \right] \quad (8)$$

При  $k \rightarrow 0$  в пределе имеем стойку Рис. 12, б ( $\mu = 1$ ). Наглядное сравнение упругих осей (Рис. 13) показывает приемлемую их близость. Коэффициент приведения длины для функции (8) равен 0.932, то есть погрешность достигает 6.8%.

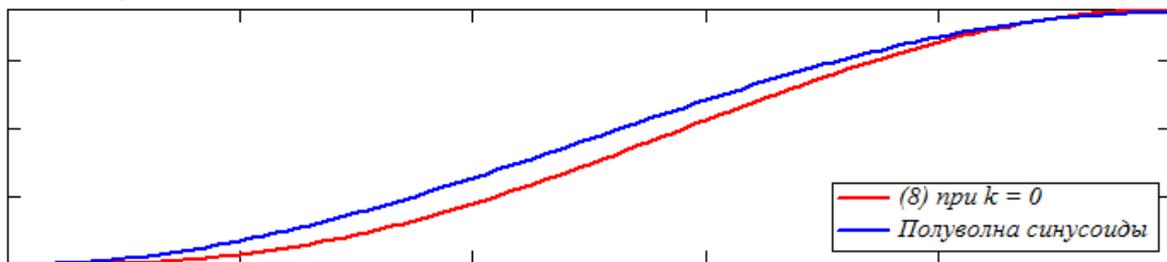


Рис. 13

Гораздо точнее функция (8) аппроксимирует функцию (1) при  $k = 1$  (Рис. 14). Здесь  $\mu = 0.691$ , то есть обеспечивает погрешность всего 1.3%.

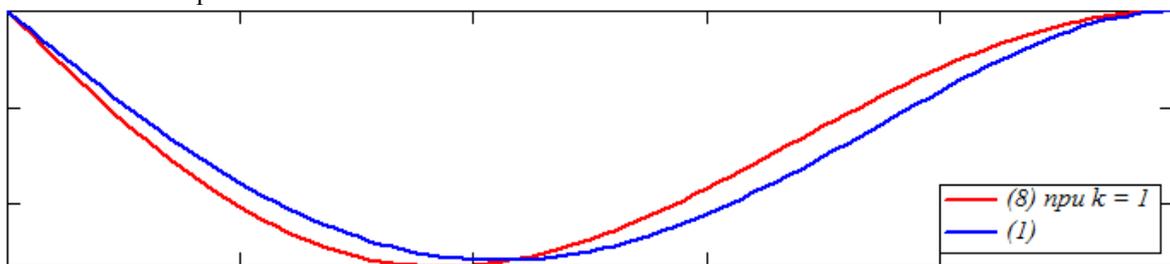


Рис. 14

Зависимость  $\mu$  от  $k$  (Рис. 15) не только качественно напоминает Рис. 10, но и дает почти такое же значение оптимальной относительной координаты промежуточного шарнира: 0.662. Разница состоит в том, что здесь коэффициент приведения длины при этой координате существенно больше: 0.66, и дает почти втрое меньшую критическую силу. Такого следовало ожидать: совокупная «сила» граничных условий для стойки Рис. 12, а заметно ниже, чем для стойки Рис. 8, а.

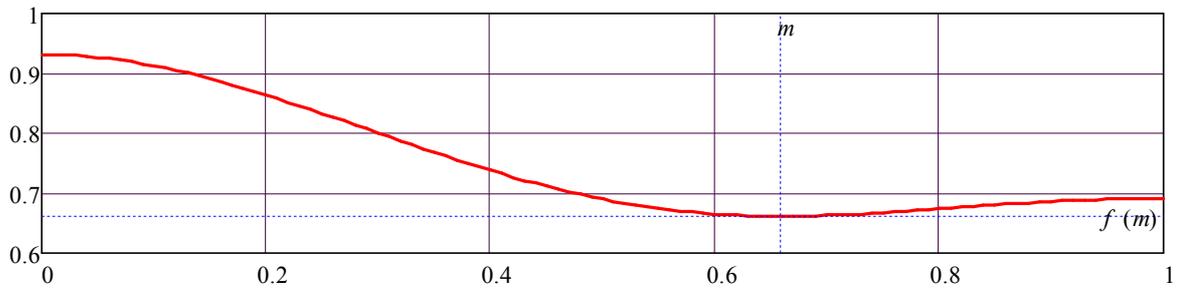


Рис. 15

Упругая кривая для оптимального значения  $k$  показана на Рис. 16.

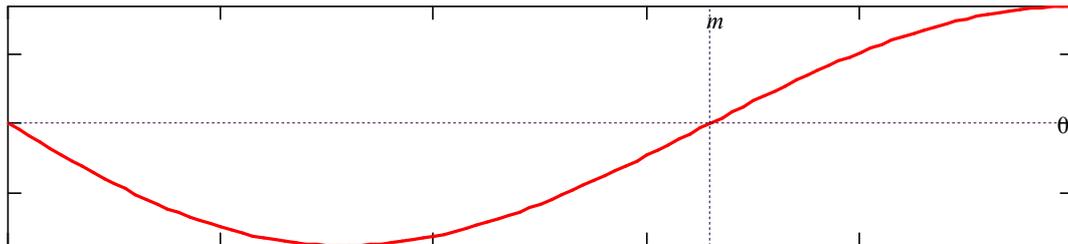


Рис. 16

Подводя итоги, можно сделать следующие выводы: подпор стойки промежуточным шарниром способен существенно, в несколько раз, повысить критическую силу. Если совокупная «сила» граничных условий, а, следовательно, жесткость связей на одном из концов существенно больше, чем на другом, то ближе именно к последнему следует устанавливать шарнир. Если же жесткости связей на концах идентичны, или близки, или если аналитическое решение задачи затруднено, то простейшим действием будет установка шарнира как можно ближе к середине стойки.

1. Феодосьев В. И., Сопротивление материалов, М., Наука, 1986
2. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. 2, М., Наука, 1965