

## Расчет бесконечного моста балочного типа

Рассматривается мост с произвольным числом пролетов одинаковой длины, сводимый к расчетной схеме неразрезной балки. Мост нагружен собственным весом постоянной величины. Примеры подобных мостов показаны на Рис. 1, расчетная схема – на Рис. 2, а.



Рис. 1

Требуется изучить прочность и жесткость моста при числе пролетов  $n$ , стремящемся к бесконечности.

Прежде всего, для упрощения математических выкладок, условимся использовать безразмерные единицы, выражая длины в долях  $l$ , силы в долях  $ql$ , а моменты – в долях  $ql^2$ .

Отбросив связи, заменим их реакциями (Рис. 2, б), и составим сумму сил на вертикаль:

$$\sum F_y = \sum_{i=1}^{n+1} R_i - n = 0$$

При  $n \rightarrow \infty$  можно принять, что  $n + 1 \approx n$ , поэтому  $R_i \approx 1$

Теперь попытаемся найти момент над опорой с произвольным, но весьма большим, номером  $k$  (Рис. 2, б). Момент от реакций образует арифметическую прогрессию

$$M(R) = R_1(k-1) + R_2(k-2) + \dots + R_{k-1} \cdot 1 = (k-1) + (k-2) + \dots + 1,$$

сумма которой равна  $\frac{2(k-1)-1 \cdot [(k-1)-1]}{2} (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$  (здесь и далее положительный момент считаем сжимающим верхние слои). При  $k \rightarrow \infty$  имеем  $k-1 \approx k$ , значит,  $M(R) \rightarrow \frac{k^2}{2}$ . Момент от распределенной нагрузки

$$M(q) = -\frac{(k-1)^2}{2} \rightarrow -\frac{k^2}{2}.$$

По суперпозиции сумма моментов  $M(R)$  и  $M(q)$  дает нуль. То есть в рамках упрощающего предположения (1) найти момент над опорой, удаленной от концов балки, не удалось. Придется перейти к более строгим приемам типа метода сил.

Прежде всего рассмотрим один из пролетов, далеких от концов балки (Рис. 3, а). С каждой стороны от любой опоры имеется очень большое число одинаковых пролетов, поэтому сечение над любой опорой можно считать сечением прямой симметрии. Значит, кососимметричные факторы типа угла поворота касательной обращаются в нуль и можно считать, что сечения над опорами не поворачиваются. Следовательно, шарниры допустимо заменить заделками – получаем расчетную схему Рис. 3, б. Но сам пролет также симметричен, поэтому и в его середине угол снова нулевой: рассматриваем половину пролета со связью, запрещающей поворот (Рис. 3, в). Пренебрегая нормальными силами, получаем единожды статически неопределимую балку, основная система для которой может иметь вид Рис. 3, г. Эквивалентная система Рис. 3, д, расчетная схема для внешних сил Рис. 3, е, их эпюра Рис. 3, ж. Аналогично для единичного момента Рис. 3, з-и.

$$\delta_{11} = \frac{1}{2}l; \quad \delta_{1F} = -\frac{1}{48}ql^3; \quad X_1 = \frac{1}{24}ql^2$$

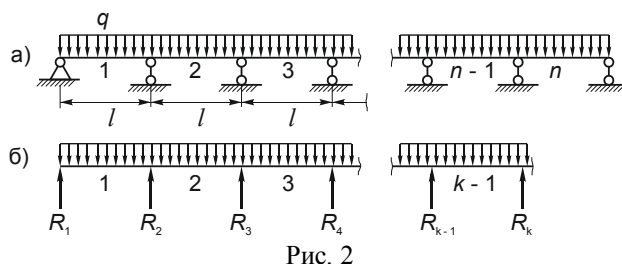


Рис. 2

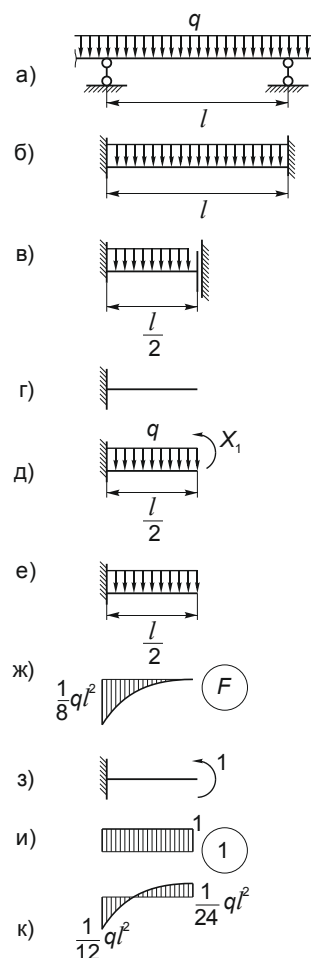


Рис. 3

И, окончательно, суммарная эпюра для половины пролета имеет вид Рис. 3, к. Значит, по мере удаления пролета от концов балки, моменты над опорами стремятся к  $\frac{1}{12}ql^2$  (сжатые слои снизу), а в серединах пролетов – к  $\frac{1}{24}ql^2$  (сверху).

Теперь перейдем к расчету методом сил исходной конструкции. Балка Рис. 2, а статически неопределима  $m = n - 1$  раз (здесь введено обозначение  $m$  числа промежуточных опор). Основная система Рис. 4, а, эквивалентная система Рис. 4, б, эпюра внешних сил Рис. 4, в, эпюры от первых двух единичных моментов Рис. 4, г-д.

$$\delta_{ii} = \frac{2}{3}; \quad \delta_{iF} = -\frac{1}{12}; \quad \delta_{ij} = \frac{1}{6}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m; \quad |i - j| = 1$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

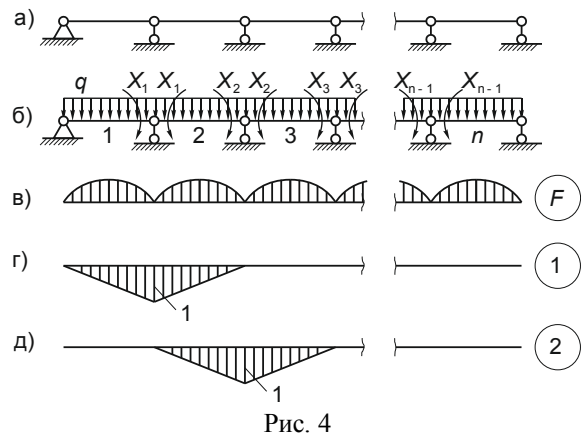


Рис. 4

Матрица податливостей получила вид, называемый трехдиагональным или ленточным. Решение системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов удобно получать методом прогонки. Его суть изложена в любом справочнике по численным методам решения систем уравнений. Для данной задачи метод прогонки сводится к следующему алгоритму.

Прямой ход:

$$P_1 = -\frac{\delta_{1,2}}{\delta_{1,1}}; \quad Q_1 = \frac{\delta_{1,F}}{\delta_{1,1}}$$

$$\begin{cases} P_i = -\frac{\delta_{i,i+1}}{\delta_{i,i} + \delta_{i+1,i}P_{i-1}} \\ Q_i = -\frac{\delta_{i+1,i}Q_{i-1} - \delta_{i,F}}{\delta_{i,i} + \delta_{i+1,i}P_{i-1}} \end{cases}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1$$

$$M_m = -\frac{\delta_{m,m-1}Q_{m-1} - \delta_{m,F}}{\delta_{m,m} + \delta_{m,m-1}P_{m-1}}$$

Обратный ход:

$$M_i = P_i M_{i+1} + Q_i, \quad i = m-1, m-2, \dots, 1$$

Таким образом, можно сформировать вектор  $M$  размером  $m$ . Элемент вектора с номером  $i$  – изгибающий момент над  $i$ -ой опорой.

Для полноценного расчета на прочность следует сформировать аналогичный вектор реакций опор  $R$  размером  $(n + 1)$  – Рис. 5:

$$R_1 = \frac{1}{2} + M_1; \quad R_{m+2} = \frac{1}{2} + M_m$$

$$R_i = -\sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1)R_j + \frac{1}{2}i^2 + M_i, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$R_{m+1} = 2 + M_{m-1} - 2R_{m+2}$$

На Рис. 6 представлен график первых десяти элементов вектора  $R$  для очень большого числа пролетов. Нетрудно видеть, что предположение (1), дающее большую погрешность на

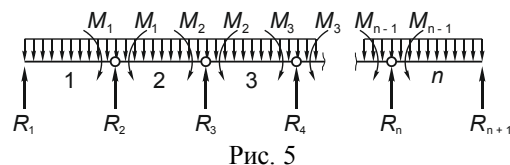


Рис. 5

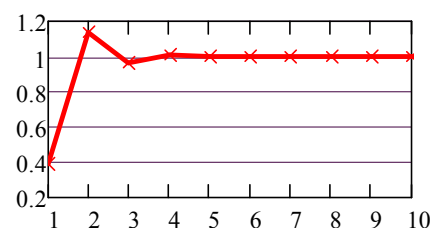


Рис. 6

первых опорах, уже начиная с четвертой, полностью оправдывается.

Функция моментов записывается очевидным образом:

$$M_x(z) = -\frac{z^2}{2} + \sum_{i=1}^n H(z-i+1) \cdot R_i(z-i+1) \quad (2)$$

где  $H(z)$  – функция Хевисайда.

На Рис. 7 показана эпюра моментов для шестипролетной балки. Красные пунктирные линии соответствуют величинам  $\frac{1}{24}$  и  $-\frac{1}{12}$ : как было показано выше, именно к ним стремятся моменты в серединах пролетов и над опорами, соответственно, при стремлении числа пролетов в бесконечность.

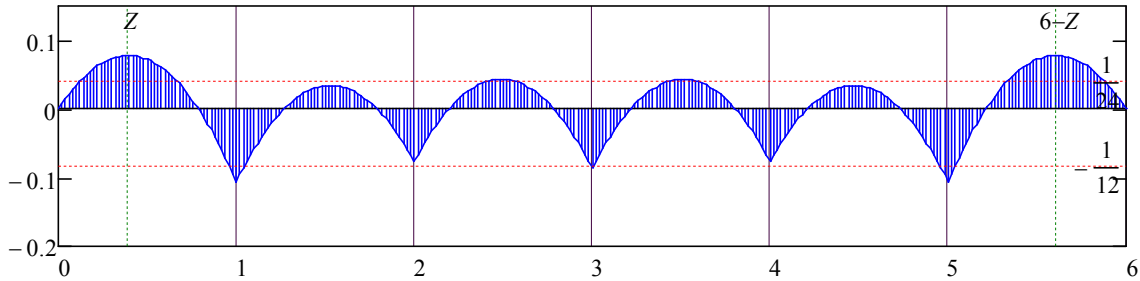


Рис. 7

Расчет на прочность завершается сравнением моментов в возможных опасных сечениях. В крайних пролетах, на расстояниях, численно равных реакциям крайних опор, то есть 0.394 от последних (зеленые пунктирные линии), момент на 7% меньше моментов над опорами, удаленными от концов. А вот моменты над второй и предпоследней опорами достигают величины 0.106, что на 23.6% больше, чем  $\frac{1}{12}$ . Значит, опасные сечения расположены именно над вторыми по счету опорами с обоих концов, максимальный момент составляет  $0.106ql^2$ .

Расчет на жесткость сводится к обычным действиям: двукратное интегрирование уравнения (2), определение первой константы из граничного условия  $v(l) = 0$ , и построение упругой оси Рис. 8.

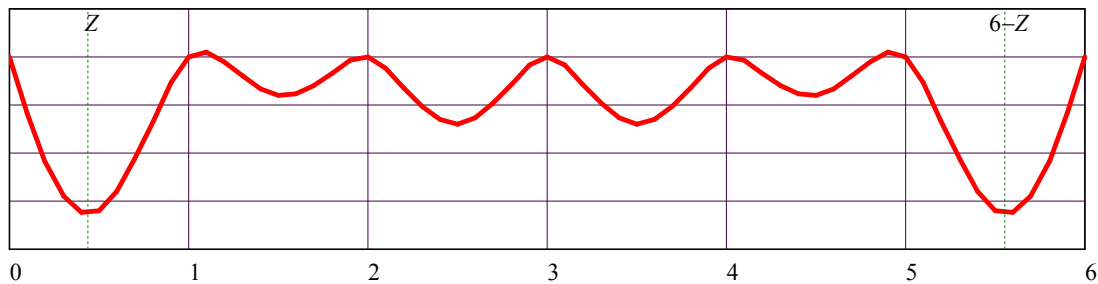


Рис. 8

Максимальные прогибы достигаются на расстояниях 0.441 от крайних опор и составляют  $3.64 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI_x}$ .