

## Расчет круглого звена цепи

Дана цепь с круглыми звеньями (Рис. 1). Для одного звена необходимо:

- Построить эпюру изгибающих моментов, найти максимальный момент и опасное сечение;
- Найти изменение размера кольца в направлении действия силы и в перпендикулярном направлении.

При решении принять следующие гипотезы:

- Поперечные размеры сечения малы по сравнению с диаметром кольца;
- Контактными напряжениями можно пренебречь;
- Собственный вес звена (и даже всей цепи) намного меньше силы, приложенной к цепи.



Рис. 1

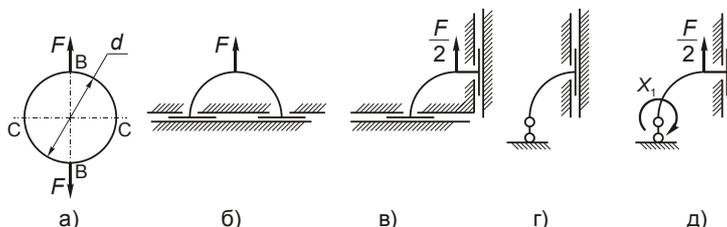


Рис. 2

В качестве расчетной схемы выберем плоскую безопорную раму (Рис. 2, а). Изначально конструкция трижды статически неопределима. Воспользовавшись прямой симметрией относительно оси СС, сведем исходную конструкцию к виду Рис. 2, б. В сечениях прямой симметрии С разрешено горизонтальное перемещение, потому что поперечная сила, его запрещающая, является кососимметричным силовым фактором и обнуляется. Однако в данном виде конструкция подвижна по горизонтали и является кинематически изменяемой. К тому же, можно использовать прямую симметрию по оси ВВ. Рассуждая аналогично, приходим к задаче Рис. 2, в. В каждом из сечений – В и С – реакциями являются изгибающий момент и осевая сила: всего  $2 + 2 = 4$  неизвестных. Уравнений равновесия, как обычно в плоских задачах, три. Следовательно, система единожды статически неопределима.

Строго говоря, последняя фраза не совсем верна – степень статической неопределимости исходной конструкции Рис. 2, а осталась равным трем. Используя симметрию, мы свели порядок системы уравнений метода сил от трех к одному. Но если бы задача была изначально поставлена в виде Рис. 2, в, то она действительно была бы статически неопределима один раз.

Выберем основную систему, отбросив угловую связь в сечении В – Рис. 2, з, эквивалентная система имеет вид Рис. 2, д. Каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0 \tag{1}$$

Условимся отсчитывать угол от сечения В против часовой стрелки и считать положительным момент, сжимающий внутренние слои. Кроме того, будем записывать формулы не через диаметр звена  $d$ , а через радиус  $r$ .

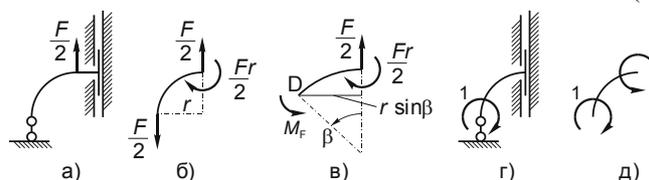


Рис. 3

Состояние «F» – Рис. 3, а, конструкция после замены связей на реакции – Рис. 3, б, сечение с произвольным текущим углом  $\beta$  – Рис. 3, в. Уравнение равновесия:

$$\sum M_D = -M_F + \frac{Fr}{2} - \frac{F}{2}r \sin \beta = 0 \rightarrow M_F = \frac{Fr}{2}(1 - \sin \beta) \tag{2}$$

Аналогично: состояние «1» – Рис. 3, з, конструкция после замены связей на реакции – Рис. 3, д, а функцию единичного момента можно записать даже без уравнения равновесия:  $M_1 = -1$  (минус обусловлен тем, что единичный момент сжимает внешние слои).

Строить эпюры нет смысла, так как перемножать их методом Верещагина нельзя – этот метод работает только тогда, когда одна из эпюр прямолинейна, что в принципе невозможно в кривых стержнях. Поэтому следует использовать интеграл Мора в явном виде.

Интегрирование должно выполняться по линейной координате, но для удобства мы сведем его к интегрированию по углу, основываясь на соотношении

$$z = r \cdot \beta \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta) d(r \cdot \beta) = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta) d\beta$$

Здесь  $f(\beta)$  – произвольная функция угла  $\beta$ ,  $z = r \cdot \beta$  – дуговая координата, отсчитываемая от сечения В вдоль оси против часовой стрелки.

Жесткость  $EI$ , входящая в оба обобщенных перемещения, сократится в уравнении (1), поэтому для простоты опускается:

$$\delta_{11} = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_1(\beta) M_1(\beta) d\beta = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1) \cdot (-1) d\beta = r \cdot \beta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\delta_{1F} = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x(\beta) M_1(\beta) d\beta = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Fr}{2} (1 - \sin \beta) (-1) d\beta = -\frac{Fr^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \beta) d\beta = -\frac{Fr^2}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \beta d\beta \right) =$$

$$= -\frac{Fr^2}{2} (\beta + \cos \beta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{Fr^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{Fr^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)}{r \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{Fr}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{2}{\pi} = \frac{Fr}{2} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

Таким образом, функция изгибающего момента получает вид:

$$M_x(\beta) = M_F(\beta) + M_1(\beta) \cdot X_1 = \frac{Fr}{2} (1 - \sin \beta) + (-1) \frac{Fr}{2} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{Fr}{2} \left( 1 - \sin \beta - 1 + \frac{2}{\pi} \right) = \frac{Fr}{2} \left( \frac{2}{\pi} - \sin \beta \right) \quad (3)$$

Подсчитаем моменты в характерных сечениях:

$$M_x(0) = \frac{Fr}{2} \left( \frac{2}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} Fr \approx 0.318 \cdot Fr; \quad M_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{Fr}{2} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx -0.035 \cdot Fr$$

$$M_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Fr}{2} \left( \frac{2}{\pi} - 1 \right) \approx -0.182 \cdot Fr$$

Эпюра изгибающих моментов показана на Рис. 4. Максимальный момент  $M_{\max} \approx 0.318 \cdot Fr$ . Опасные сечения – В.

Переходим к расчету на жесткость. Чтобы определить перемещение в направлении ВВ, приложим к основной системе Рис. 2, б единичную силу, и, как и ранее, пользуясь симметрией, рассмотрим только левую половину, однако единицу тоже следует разделить пополам (Рис. 5, а). Поскольку отличие Рис. 5, а от Рис. 3, а состоит только в размерности силы, сразу записываем единичную функцию, основываясь на уравнении (2):

$$M_1 = \frac{r}{2} (1 - \sin \beta)$$

$$\Delta y = \frac{1}{EI} \cdot r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x(\beta) M_1(\beta) d\beta = \frac{r}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Fr}{2} \left( \frac{2}{\pi} - \sin \beta \right) \cdot \frac{r}{2} (1 - \sin \beta) d\beta = \frac{Fr^3}{4EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{\pi} - \sin \beta \right) (1 - \sin \beta) d\beta =$$

$$= \frac{Fr^3}{4EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sin \beta - \sin \beta + \sin^2 \beta \right) d\beta = \frac{Fr^3}{4EI} \left( \frac{2}{\pi} \beta + \frac{2}{\pi} \cos \beta + \cos \beta - \frac{\sin \beta \cos \beta}{2} + \frac{1}{2} \beta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{Fr^3}{4EI} \left( \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} - 1 \right) = \frac{Fr^3}{4EI} \left( 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} - 1 \right) = \frac{Fr^3}{4EI} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right)$$

Найденная величина  $\Delta y$  – это изменение радиуса в расчетной схеме Рис. 5, а, искомое же изменение диаметра в направлении ВВ вдвое больше:

$$\Delta d_{BB} = 2\Delta y = 2 \cdot \frac{Fr^3}{4EI} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{Fr^3}{2EI} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \approx 0.074 \frac{Fr^3}{EI} \quad (4)$$

Для вычисления перемещения в направлении СС приложим к основной системе единичную горизонтальную силу, опять же разделенную надвое, поскольку ранее мы разделили расчетную схему пополам вертикальной осью (Рис. 5, б). Отбросив связи и заменив их реакциями, получим Рис. 5, в. Уравнение равновесия для произвольного угла  $\beta$  (Рис. 5, з):

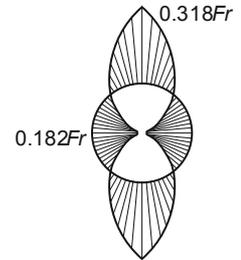


Рис. 4

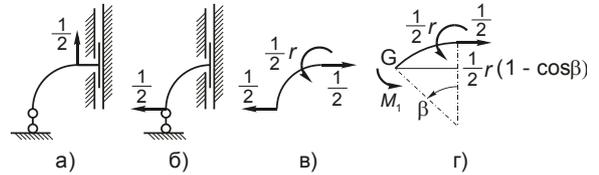


Рис. 5

$$\sum M_G = -M_1 - \frac{r}{2} + \frac{r}{2}(1 - \cos\beta) = 0 \rightarrow M_1 = \frac{1}{2}[-r + r(1 - \cos\beta)] = \frac{r}{2}(-1 + 1 - \cos\beta) = -\frac{1}{2}r \cdot \cos\beta$$

$$\Delta x = \frac{1}{EI} \cdot r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x(\beta) M_1(\beta) d\beta = \frac{r}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Fr}{2} \left( \frac{2}{\pi} - \sin\beta \right) \frac{1}{2} (-r \cdot \cos\beta) d\beta = -\frac{Fr^3}{4EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{\pi} - \sin\beta \right) \cos\beta d\beta =$$

$$= -\frac{Fr^3}{4EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{\pi} \cos\beta - \sin\beta \cos\beta \right) d\beta = -\frac{Fr^3}{4EI} \left( \frac{2}{\pi} \sin\beta - \frac{1}{2} \sin^2\beta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{Fr^3}{4EI} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$$

Изменение диаметра в направлении СС равно

$$\Delta d_{CC} = 2\Delta x = -2 \cdot \frac{Fr^3}{4EI} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{Fr^3}{2EI} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \approx -0.068 \frac{Fr^3}{EI} \quad (6)$$

Перемещение получилось отрицательным, потому что звено цепи сжимается в поперечном направлении, а мы направили единичную силу в сторону его расширения.

Результат расчета на жесткость может быть проверен с помощью формулы, выведенной специально для тонких колец, в том числе сечений в виде тонкостенных труб [1]. Уравнение имеет вид

$$EI \frac{u + u''}{r^2} = M_x \quad (7)$$

здесь  $u$  – функция радиального перемещения, штрих означает дифференцирование по  $\beta$ .

Расчетная схема имеет вид Рис. 6. Ниже приводится фрагмент программы для решения уравнения (7) в приложении MathCAD:

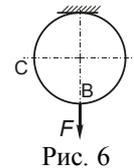


Рис. 6

$u(\beta) + u''(\beta) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi} - \sin(\beta) \right)$  Дифференциальное уравнение с учетом функции изгибающего момента  $M_x$  (3). Постоянные множители  $E, I, r, F$  опущены

$u'(\pi) = 0 \quad u'(0) = 0$  Граничные условия: углы поворота касательной в сечениях В равны нулю

$u := \text{Odesolve}(\beta, 4)$  Оператор решения обыкновенного дифференциального уравнения

$u(\pi) = -0.149$  Результат – перемещение сечения В

$2 \cdot u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.137$  Результат – перемещение сечения С

Как видно, полученные численные результаты по модулю совпадают с результатами аналитического решения (4) и (6) соответственно. Перемещение каждого сечения С равно  $\Delta x$  (5), то есть вдвое меньше, чем  $\Delta d_{CC}$  (6), поэтому для наглядности результат удвоен.

Теперь усложним задачу, рассмотрев то же звено, но с диаметральной перемычкой, называемой контрфорсом (Рис. 7). Можно видеть, что форма реального звена несколько отличается от окружности и напоминает эллипс. Но мы будем условно считать, что звено имеет вид Рис. 8, а, а расчетная схема Рис. 8, б. Таким образом, задача состоит в том, чтобы выяснить, как влияет контрфорс на прочность и жесткость звена при прочих равных условиях.



Рис. 7

Изначально конструкция, имеющая два замкнутых контура, статически неопределима шесть раз. Однако, как и в предыдущей задаче, прямая симметрия относительно двух осей позволяет исключить из рассмотрения поперечные силы в сечениях ВВ и СС. Кроме того, можно учесть, что осевая жесткость стержня (в данном случае контрфорса) настолько больше его изгибной жесткости, что вполне может считаться бесконечной.

Таким образом, контрфорс не испытывает никаких деформаций и его можно заменить заделкой. Расчетная схема получает вид Рис. 8, в. В данной постановке задача трижды статически неопределима. Вновь воспользовавшись прямой симметрией по оси ВВ, рассмотрим половину рамы Рис. 8, з. В сечении В не возникает ни поворота

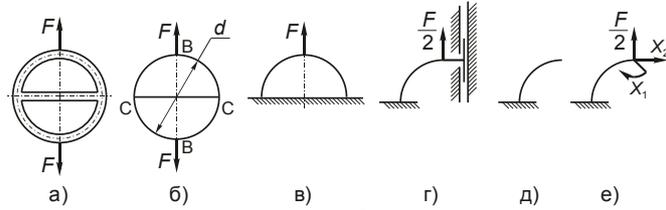


Рис. 8

касательной, ни горизонтального смещения, поскольку оба эти кинематических фактора обладают косой симметрией. Основную систему выберем в виде Рис. 8, д. Эквивалентная система состоит из расчетной схемы Рис. 8, е и канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, пользуясь симметрией, удалось свести изначально шесть раз статически неопределимую задачу всего к двум уравнениям.

Вывод уравнений моментов по Рис. 9 приводит к следующим выражениям:

$$M_F = -\frac{Fr}{2} \sin \beta$$

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = r(1 - \cos \beta)$$

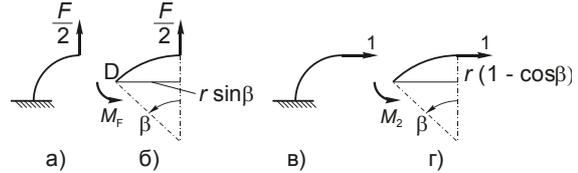


Рис. 9

Коэффициенты уравнений (8) равны:

$$\delta_{11} = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta = r \cdot \beta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r \cdot \frac{\pi}{2}; \quad \delta_{12} = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \beta) d\beta = r^2 (\beta - \sin \beta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$\delta_{22} = r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \beta)^2 d\beta = r^3 \left( \frac{3}{2} \beta - 2 \sin \beta + \frac{1}{4} \sin 2\beta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^3 \left( \frac{3}{4} \pi - 2 \right)$$

$$\delta_{1F} = -\frac{Fr}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \beta d\beta = -\frac{Fr}{2} \cos \beta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{Fr}{2}$$

$$\delta_{2F} = -\frac{Fr^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \beta (1 - \cos \beta) d\beta = -\frac{Fr^2}{2} \left( -\cos \beta + \frac{1}{4} \cos 2\beta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{Fr^2}{4}$$

Решая систему (8), находим силовые факторы в сечении В:

$$X_1 = 2 \frac{\pi - 3}{\pi^2 - 8} Fr \approx 0.151 \cdot Fr; \quad X_2 = \frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} Fr \approx 0.459 \cdot Fr$$

Функция изгибающих моментов имеет вид

$$\begin{aligned} M_x &= M_F + X_1 M_1 + X_2 M_2 = -\frac{Fr}{2} \sin \beta + 2 \frac{\pi - 3}{\pi^2 - 8} Fr + \frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} (1 - \cos \beta) Fr = \\ &= Fr \left( -\frac{\sin \beta}{2} + 2 \frac{\pi - 3}{\pi^2 - 8} + \frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} (1 - \cos \beta) \right) \end{aligned}$$

Моменты в характерных сечениях равны:

$$M_x(0) = X_1 \approx 0.151 \cdot Fr; \quad M_x\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -0.068 \cdot Fr \quad M_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -0.111 \cdot Fr$$

Опасные сечения, как и предыдущей задаче, расположены в точках приложения сил, однако соотношение моментов примерно равно 2.1. То есть контрфорс позволил повысить прочность более чем вдвое.

Наглядное сравнение моментов приведено на Рис. 10, где черным цветом показана эпюра для обычного круглого звена, красным – звена с контрфорсом.

Выполним расчет на жесткость, приложив к конструкции Рис. 8, в вертикальную силу, равную единице. Далее после учета симметрии получается задача, показанная на Рис. 9, а, только вместо силы  $F$  будет единица. Поэтому внешний вид единичной функции (обозначим ее  $M'$ ) будет с точностью до размерности соответствовать функции  $M_F$ :

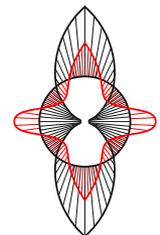


Рис. 10

$$M' = -\frac{r}{2} \sin \beta$$

$$\begin{aligned} EI \Delta y &= r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_F M' d\beta = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} Fr \left( -\frac{\sin \beta}{2} + 2 \frac{\pi-3}{\pi^2-8} + \frac{4-\pi}{\pi^2-8} (1-\cos \beta) \right) \left( -\frac{r}{2} \sin \beta \right) d\beta = \\ &= -\frac{Fr^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{\sin \beta}{2} + 2 \frac{\pi-3}{\pi^2-8} + \frac{4-\pi}{\pi^2-8} (1-\cos \beta) \right) \sin \beta d\beta = \\ &= -\frac{Fr^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \beta d\beta + 2 \frac{\pi-3}{\pi^2-8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \beta d\beta + \frac{4-\pi}{\pi^2-8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos \beta) \sin \beta d\beta \right] = \\ &= -\frac{Fr^3}{2} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\beta \right) - 2 \frac{\pi-3}{\pi^2-8} \cos \beta + \frac{4-\pi}{\pi^2-8} \left( -\cos \beta + \frac{1}{4} \cos 2\beta \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{Fr^3}{2} \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{4-\pi}{\pi^2-8} \left( -\frac{1}{4} \right) + 2 \frac{\pi-3}{\pi^2-8} - \frac{4-\pi}{\pi^2-8} \left( -1 + \frac{1}{4} \right) \right] = \\ &= -\frac{Fr^3}{2} \left[ -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4-\pi}{\pi^2-8} + 2 \frac{\pi-3}{\pi^2-8} \right] \approx -\frac{Fr^3}{2} (-0.012) = \frac{Fr^3}{2} \cdot 0.012 \end{aligned}$$

$$\Delta y = 0.012 \frac{Fr^3}{2EI}$$

Изменение диаметра равно

$$\Delta d = 2\Delta y = 0.012 \frac{Fr^3}{EI}$$

Сравнивая полученный результат с аналогичным перемещением в простой раме (4), можно сделать вывод, что жесткость звена цепи возросла более чем в 12 раз благодаря контрфорсу. Что же касается изменения диаметра вдоль оси СС, то оно в звене с контрфорсом вообще отсутствует, в отличие от простого звена.

1. Den Hartog J. P., *Advanced Strength of Materials*, Dover Publications Inc., New York, 1952
2. Воронов С. А., Ширшов А. А., Ярьско С. В., *Расчет на прочность и жесткость стержневых систем при изгибе с использованием MathCAD, Часть 2, Статически неопределимые балки и плоские криволинейные рамы*, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011