Геометрические характеристики плоских фигур

В геометрии вводятся следующие понятия:

$A = \int_A dA$ – площадь;

$S_x = \int_A y \cdot dA$; $S_y = \int_A x \cdot dA$ – статические моменты;

$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$; $I_y = \int_A x^2 \cdot dA$ – осевые моменты инерции;

$I_{xy} = \int_A xy \cdot dA$ – центробежный момент инерции

Изменение статических моментов при параллельном переносе осей

Дано: S_u, S_v, a, b (Рис. 1). Найти: S_x, S_y.
Выразим координаты друг через друга: $x = u - b$, $y = v - a$. Тогда

$$S_x = \int y \cdot dA = \int (v-a)\, dA = \int v \cdot dA - \int a \cdot dA = S_u - a\int dA = S_u - a \cdot A; \qquad \text{аналогично } S_y = S_v - b \cdot A \tag{1}$$

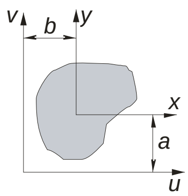

Рис. 1

Подберем константы a и b так, что $a = \dfrac{S_u}{A}$; $b = \dfrac{S_v}{A}$. Тогда из формул (1) следует:

$$S_x = S_u - \frac{S_u}{A} A = 0; \qquad \text{аналогично } S_y = 0$$

☝ <u>Центральная ось</u>: Ось, относительно которой статический момент равен нулю

☝ <u>Центр тяжести (центр масс)</u>: Точка, через которую проходят две взаимно перпендикулярные центральные оси

⊕ У центра тяжести есть простой механический смысл. Представим себе пластину постоянной толщины h, имеющую в плане форму изучаемой фигуры. Введем плотность материала ρ, массу m, объем V пластины. Тогда сила, действующая на элементарную площадку dA, равна
$\mathrm{d}F = \mathrm{d}m \cdot g = \mathrm{d}V \cdot \rho \cdot g = \mathrm{d}A \cdot h \cdot \rho \cdot g$
Момент относительно оси y, равный произведению силы на плечо (расстояние от площадки до оси), имеет вид
$\mathrm{d}M = \mathrm{d}F \cdot y = \mathrm{d}A \cdot h \cdot \rho \cdot g \cdot y$
Момент для всей пластины

$$M = \int_A dM = \int_A h \cdot \rho \cdot g \cdot y \cdot dA$$

Вынося за интеграл постоянные множители, получаем:

$$M = \int_A dM = h \cdot \rho \cdot g \int_A y \cdot dA = \mathrm{const} \cdot S_x$$

То есть механический момент (пара сил) оказывается пропорционален моменту статическому. Поэтому если такую пластину, расположенную горизонтально, опереть на единственную точку, совпадающую с центром тяжести (точкой пересечения центральных осей), пластина будет находиться в равновесии.
Иными словами, статический момент – аналог механического момента. Статический момент относительно оси – равнодействующая моментов, действующих на все элементарные площадки, относительно оси. Если сумма моментов с одной стороны от оси равна сумме с другой, тело находится в равновесии, и ось является центральной

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Дано: I_x, I_y, $S_x = S_y = 0$, a, b (Рис. 1). Найти: I_u, I_v
Связь координат: $u = x + b$, $v = y + a$. Тогда

$$I_u = \int v^2 dA = \int (y+a)^2 dA = \int y^2 dA + 2a\int y dA + a^2 \int dA = I_x + \underline{2a \cdot S_x} + a^2 A = I_x + a^2 A; \qquad \text{аналогично } I_v = I_y + b^2 A. \tag{2}$$

Второе (подчеркнутое) слагаемое обратилось в нуль, потому что оси x и y – центральные.

⊕ Формула (2) применима только для двух параллельных осей, одна из которых является центральной

⊕ Все величины в формуле (2) – положительные. Поэтому $I_u \geq I_x$ (равенство возможно лишь при $a = 0$). То есть среди всех моментов инерции относительно параллельных осей центральный момент – наименьший

Изменение моментов инерции при повороте осей

Дано: I_x, I_y, I_{xy}, α. Найти: I_u, I_v, I_{uv} (Рис. 2, *а*).
Связь координат: $v = y \cos\alpha - x \sin\alpha$, $u = y \sin\alpha + x \cos\alpha$.

$$I_u = \int v^2 dA = \int (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA = \int y^2 \cos^2\alpha \cdot dA - \int 2xy \sin\alpha\cos\alpha \cdot dA + \int x^2 \sin^2\alpha \cdot dA =$$
$$= \cos^2\alpha \int y^2 dA - 2\sin\alpha\cos\alpha \int xy dA + \sin^2\alpha \int x^2 dA = I_x \cos^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha + I_y \sin^2\alpha \tag{3}$$

$$I_v = \int u^2 dA = \int (y\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 dA = \int y^2 \sin^2\alpha \cdot dA + \int 2xy \sin\alpha\cos\alpha \cdot dA + \int x^2 \cos^2\alpha \cdot dA =$$
$$= I_x \sin^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha + I_y \cos^2\alpha \tag{4}$$

$$I_{uv}=\int uv\cdot dA=\int(y\sin\alpha+x\cos\alpha)(y\cos\alpha-x\sin\alpha)dA=\int(y^2\sin\alpha\cos\alpha-xy\sin^2\alpha+xy\cos^2\alpha-x^2\sin\alpha\cos\alpha)dA=$$
$$=I_x\sin\alpha\cos\alpha-I_{xy}\sin^2\alpha+I_{xy}\cos^2\alpha-I_y\sin\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha\left(I_x-I_y\right)+I_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=\frac{\sin2\alpha}{2}\left(I_x-I_y\right)+I_{xy}\cos2\alpha \qquad (5)$$

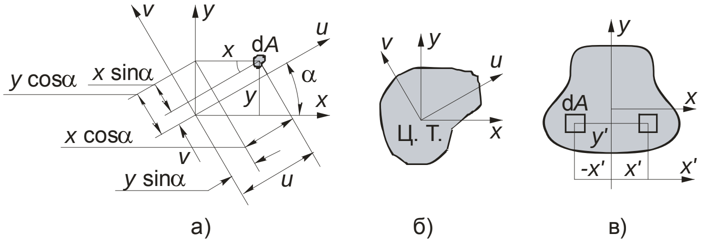

Рис. 2

Главные оси и главные моменты инерции

Как видно из определения, осевые моменты инерции – существенно положительные величины, а вот центробежный может иметь любой знак. Найдем угол α_1, при котором $I_{uv} = 0$. Из формулы (5) следует:

$$\frac{\sin2\alpha_1}{2}\left(I_x-I_y\right)+I_{xy}\cos2\alpha_1=0\rightarrow \operatorname{tg}2\alpha_1=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x} \qquad (6)$$

Сложим формулы (3) и (4):

$$I_u+I_v=I_x\cos^2\alpha\cancel{-I_{xy}\sin2\alpha}+I_y\sin^2\alpha+I_x\sin^2\alpha+\cancel{I_{xy}\sin2\alpha}+I_y\cos^2\alpha=$$
$$=I_x\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)+I_y\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=I_x+I_y \qquad (7)$$

То есть сумма осевых моментов инерции не зависит от угла и является постоянной в точке. Следовательно, если при каком-то значении угла одно из слагаемых достигает максимума, то другое – минимума. Найдем этот угол, обозначив его α_2. Для этого продифференцируем I_u (3) и приравняем нулю:

$$\frac{dI_u}{d\alpha}=0\rightarrow\frac{d}{d\alpha}\left(I_x\cos^2\alpha-I_{xy}\sin2\alpha+I_y\sin^2\alpha\right)=I_x\cdot2\cos\alpha_2(-\sin\alpha_2)-2I_{xy}\cos2\alpha_2+I_y\cdot2\cos\alpha_2\sin\alpha_2=0\rightarrow$$
$$\rightarrow\sin2\alpha_2\left(I_y-I_x\right)-2I_{xy}\cos2\alpha_2=0\rightarrow\operatorname{tg}2\alpha_2=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x} \qquad (8)$$

Сравнивая формулы (6) и (8), видим, что $\alpha_1 = \alpha_2$.

☝ Главные оси: Взаимно перпендикулярные оси, относительно которых, во-первых, центробежный момент равен нулю, а во-вторых, осевые моменты достигают экстремальных значений (один – максимума, другой – минимума)

⊕ Главные центральные оси фигуры принято обозначать x и y (без индексов, штрихов и пр.). Верно и обратное: если ось обозначена x_1, y', v и т. д., то по умолчанию она не является главной центральной

Переход от неглавных центральных осей к главным центральным

Дано: I_u, I_v, I_{uv}, $I_{xy} = 0$. Найти: I_x, I_v (Рис. 2, *б*).

$$I_{\substack{x\\y}}=\frac{I_u+I_v}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_u-I_v}{2}\right)^2+I_{uv}^2}\quad (\textit{без вывода}) \qquad (9)$$

Главные оси симметричной фигуры

Рассмотрим фигуру, имеющую одну ось симметрии y (Рис. 2, *в*). Очевидно, что центр тяжести расположен на этой оси. Возьмем произвольную ось x' и выделим площадку с координатами (x', y'). Ее центробежный момент инерции будет $I_{x'y}=\int x'y'\cdot dA$. Но в силу симметрии для этой площадки всегда найдется симметричная ей – с координатами ($-x'$, y'), и ее центробежный момент будет $I'_{x'y}=\int(-x')y'\cdot dA=-\int x'y'\cdot dA=-I_{x'y}$. А поскольку интеграл – это сумма, то при вычислении центробежного момента всей фигуры эти два сложатся и дадут нуль. То же справедливо для любой элементарной площадки, расположенной справа от оси y. Следовательно, центробежный момент всей фигуры равен нулю и поэтому оси x', y – главные. Однако ось x' выбрана произвольно, поэтому

☝ Если у фигуры есть ось симметрии, то эта ось вместе с любой перпендикулярной образует пару главных осей

☝ Следствие: Если у фигуры две перпендикулярные оси симметрии, то они являются главными

Рассмотрим квадрат. Оси, проходящие через середины сторон, являются главными центральными. Поэтому один из главных моментов инерции должен иметь максимальное, другой – минимальное значения. Но они равны. А поскольку сумма осевых моментов инерции также постоянна согласно формуле (7), то все центральные моменты инерции квадрата равны между собой, и все центральные оси являются главными. То же можно показать для любого правильного многоугольника

Главные центральные моменты инерции простейших фигур

Прямоугольник (Рис. 3, *а*)

$$dA = b \cdot dv; \qquad I_u = \int v^2 dA = \int v^2 b \cdot dv = b\int v^2 dv = b\frac{v^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}bh^3; \qquad \text{аналогично } I_v = \frac{1}{3}hb^3$$

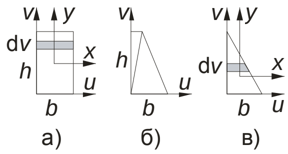

Рис. 3

Перейдем к главным центральным осям, пользуясь формулами (2):

$$A = bh; \quad y_C = \frac{h}{2}; \; I_x = I_u - y_C^2 A = \frac{1}{3}bh^3 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = bh^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}bh^3; \qquad \text{аналогично } I_y = \frac{1}{12}hb^3$$

Треугольник (Рис. 3, *б*)

Поскольку момент инерции элементарной площадки относительно некоторой оси зависит только от площади и расстояния до оси, площадку можно двигать вдоль этой оси, не изменяя момента инерции. Тогда произвольный треугольник (Рис. 3, *б*) путем сдвига элементарных площадок влево, вплотную к оси v, превращается в прямоугольный (Рис. 3, *в*).

$$dA = \left(1 - \frac{v}{h}\right) b \cdot dv; \qquad I_u = \int v^2 dA = \int v^2 \left(1 - \frac{v}{h}\right) b \cdot dv = b\left(\int v^2 dv - \frac{1}{h}\int v^3 dv\right) =$$

$$= b\left(\frac{v^3}{3}\Big|_0^h - \frac{1}{h}\frac{v^4}{4}\Big|_0^h\right) = bh^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}bh^3; \qquad \text{аналогично } I_v = \frac{1}{12}hb^3$$

Зная, что центр тяжести прямоугольного треугольника находится на расстоянии трети длины катета от основания, перейдем к главным осям согласно формулам (2):

$$A = \frac{1}{2}bh; \; y_C = \frac{1}{3}h; \qquad I_x = \frac{1}{12}bh^3 - \left(\frac{1}{3}h\right)^2 \frac{1}{2}bh = bh^3\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3-2}{36}bh^3 = \frac{1}{36}bh^3; \qquad \text{аналогично } I_y = \frac{1}{36}hb^3$$

Круговые сечения

Из теоремы Пифагора: $\rho^2 = x^2 + y^2$, тогда из (7) согласно определению полярного момента инерции следует

$$I_x + I_y = \int y^2 dA + \int x^2 dA = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int \rho^2 dA = I_p$$

Из условия центральной симметрии $I_x = I_y = \dfrac{I_p}{2}$, и тогда имеем для разных круговых сечений:

Круг: $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32} \to I_x = \dfrac{\pi d^4}{64}$

Толстостенная труба: $I_p = \dfrac{\pi D^4}{32}\left[1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right] \to I_x = \dfrac{\pi D^4}{64}\left[1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right]$ (здесь D и d – диаметры внешней и внутренней окружностей, соответственно)

Тонкостенная труба: $I_p = \dfrac{\pi d^3 \delta}{4} \to I_x = \dfrac{\pi d^3 \delta}{8}$ (δ – толщина стенки)

Моменты сопротивления простейших фигур

Осевой момент сопротивления вводится следующим образом:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \tag{10}$$

Здесь $y_{\max}$ – расстояние от оси x до самой удаленной от нее точки фигуры (максимальная ордината).

Прямоугольник: $y_{\max} = \dfrac{h}{2}; \qquad I_x = \dfrac{1}{12}bh^3; \qquad W_x = \dfrac{I_x}{y_{\max}} = \dfrac{1}{12}bh^3 \cdot \dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{6}bh^2$

Круг: $y_{\max} = \dfrac{d}{2}; \qquad I_x = \dfrac{\pi d^4}{64}; \qquad W_x = \dfrac{\pi d^3}{32}$

Толстостенная труба: $y_{\max} = \dfrac{D}{2}; \qquad I_x = \dfrac{\pi D^4}{64}\left[1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right]; \qquad W_x = \dfrac{\pi D^3}{32}\left[1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right]$

Тонкостенная труба: $y_{\max} = \dfrac{d}{2}; \qquad I_x = \dfrac{\pi d^3 \delta}{8}; \qquad W_x = \dfrac{\pi d^2 \delta}{4}$

Геометрические характеристики составной фигуры

Если фигура состоит из нескольких фигур (Рис. 4), то общий момент инерции, являющийся интегралом, то есть суммой, может быть найден как сумма моментов инерции составляющих. Обозначив внешнюю фигуру номером 1, а внутреннюю – 2, можно записать $I_x = I_x^1 - I_x^2$ (для оси y аналогично). Однако $W_x \neq W_x^1 - W_x^2$, поскольку момент сопротивления не является интегралом. Его надо искать только по общей формуле (10).

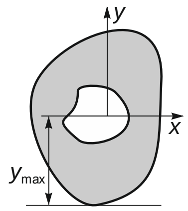

Рис. 4

Ссылки

Определение геометрических характеристик плоской фигуры, состоящей из прямоугольников