

Статически неопределимая ферма

Фермой принято называть плоскую раму, для которой справедливы следующие условия:

1. Стержни прямые;
2. Узлы шарнирные;
3. Внеузловые нагрузки – осевые.

Прежде всего при решении подобных задач следует проверить, не является ли конструкция кинематически изменяемой. В этом случае одними методами сопротивления материалов задача решена быть не может.

Кинематическую изменяемость можно трактовать по-разному. Конструкция кинематически изменяема, если выполняется хотя бы одно из трех условий:

1. Число неизвестных меньше числа уравнений равновесия;
2. В конструкции могут возникать перемещения, не удовлетворяющие требованиям принципа начальных размеров;
3. В конструкции могут возникать перемещения, не связанные с деформированием, а обусловленные движением конструкции как жесткого целого, или движением одной части конструкции относительно другой.

Проверка первого условия является самым формальным и простым действием, однако требует умения находить число неизвестных и число уравнений равновесия. Если первая задача решается, как правило, легко, то ответ на второй вопрос в ряде случаев может представлять сложность.

Однако, даже если кинематическая неизменность конструкции очевидна, подсчет двух этих чисел (числа уравнений и неизвестных) проделать все равно необходимо – для выяснения степени статической неопределимости. Это число – главная характеристика каждой конструкции. Не найдя ее (или найдя неверно), приступать к решению задачи не имеет смысла.

Если степень статической неопределимости равна нулю, то решение можно получить только на основании уравнений равновесия. В противном случае требуется составление дополнительных уравнений, число которых равно степени статической неопределимости.

Даже небольшой опыт решения задач позволяет сформулировать простые советы по определению числа уравнений равновесия.

Итак, для фермы уравнения равновесия следует составлять для следующих ее частей:

1. Узлы (шарниры, в каждом из которых сходятся хотя бы две тяги);
2. Сечения тяг, где приложены внешние силы;
3. При наличии абсолютно жесткого тела (АЖТ):
 - если АЖТ закреплено неподвижным шарниром, то составляется только уравнение моментов относительно этого шарнира;
 - в противном случае составляются следующие уравнения: суммы сил на оси, и сумма моментов относительно произвольной точки.

Рассмотрим пример (Рис. 1). Узел у конструкции один – В, и для него необходимо составить два уравнения равновесия – обычно проекции на вертикаль и горизонталь.

В сечении С приложена внешняя сила, значит, необходимо сделать два сечения на участках CD и CG и рассмотреть равновесие вырезанной части тяги DG. Однако можно обойтись одним уравнением, спроецировав усилия на ось b.

Теперь рассмотрим АЖТ. Шарнир Н является неподвижным, то есть накладывает две связи, запрещая горизонтальное и вертикальное перемещения. Следовательно, в шарнире возникают две реакции – вертикальная и горизонтальная. Их можно найти, составив два уравнения проекций, но делать это нет смысла. В самом деле, эти реакции действуют между опорой («массивным телом») и АЖТ, то есть между телами, предполагающимися абсолютно прочными и жесткими. То есть ни на прочность, ни на жесткость конструкции эти две силы не влияют. Их учет всего лишь увеличит на две единицы число уравнений равновесия и число неизвестных, оставив неизменной их разность, то есть степень статической неопределимости.

Единственный способ избежать включения этих неизвестных в уравнения – составить сумму моментов относительно шарнира Н. Силы, приложенные к этой точке, получают нулевые плечи и в уравнение моментов не войдут, что упростит решение задачи.

Таким образом, имеем $2 + 1 + 1 = 4$ уравнения равновесия. Неизвестными являются усилия на участках CD, CG, BK, BP и BQ – всего пять штук. Таким образом, степень статической неопределимости составит $5 - 4 = 1$.

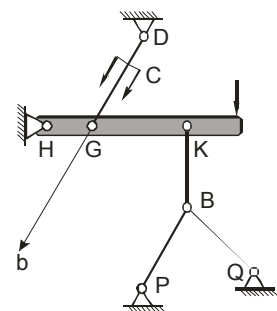


Рис. 1

К тому же выводу можно прийти более простым, но менее надежным путем. Будем по одной убирать тяги, дожидаясь превращения фермы в механизм, то есть в кинематически изменяемую конструкцию.

Уберем сначала тягу BQ и получим конструкцию, показанную на Рис. 2, а. Чтобы убедиться в ее кинематической неизменности, нужно мысленно «пошевелить» или «подвигать» ее части. Тогда АЖТ будет незначительно поворачиваться, тяги будут деформироваться, но больших перемещений не возникнет.

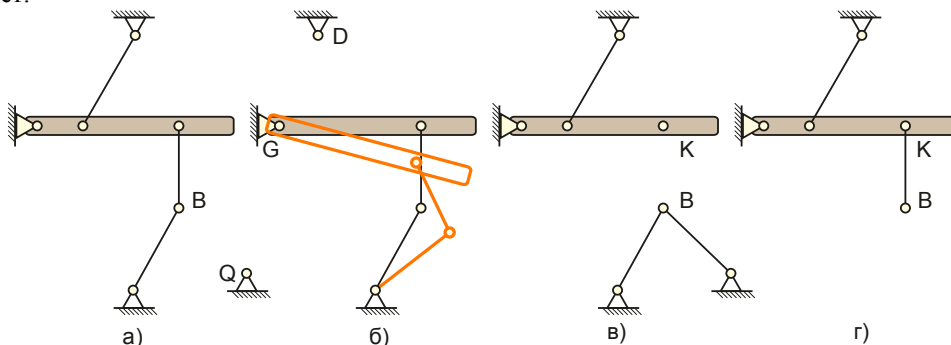


Рис. 2

Продолжим, сняв тягу DG. Тогда конструкция приобретет вид, показанный красным на Рис. 2, б. Возникли перемещения, противоречащие принципу начальных размеров. Кроме того, для перемещения одной части конструкции относительно другой (например, для взаимного поворота оставшихся двух тяг) не требуется их деформирования. Так или иначе, конструкция на Рис. 2, б кинематически изменяема. Значит, до снятия предыдущей тяги (DG) она была статически определимой, а до снятия тяги BQ – единожды статически неопределимой, что и требовалось доказать.

Если сначала снять тягу BK, то ферма распадется на две независимых конструкции, каждая из которых является статически определимой (Рис. 2, в). В этом легко убедиться, убрав любую из оставшихся трех тяг.

Не очень высокая надежность способа может быть продемонстрирована на следующем примере. Если после тяги BQ (Рис. 2, а) убрать тягу BP, то, на первый взгляд, механизма не получится (Рис. 2, г). Можно упустить из виду, что тяга BK способна свободно вращаться вокруг шарнира К, что является признаком кинематически изменяемой конструкции.

Во избежание подобной ошибки следует либо внимательнее «шевелить» части фермы, либо попробовать разные последовательности снятия тяг. Наконец, можно найти степень статической неопределимости двумя способами (как подсчетом числа уравнений и неизвестных, так и снятием тяг), и, если результаты совпадают, считать их верными.

В качестве более подробного примера рассмотрим ферму Рис. 3. Материал тяг 1, 2 и 4 – сталь, тяги 3 – медь. Необходимо:

- Найти усилия и напряжения в тягах;
- Проверить решение кинематическим и энергетическим способами;
- Найти площадь поперечного сечения из условия прочности.

Числовые данные: $F = 10$ кН, $\sigma_{Тс} = 300$ МПа (сталь), $\sigma_{Тм} = 100$ МПа (медь), $n_T = 1.5$.

Как и было сказано, необходимо начать решать задачу с определения числа уравнений равновесия. Действуя согласно советам, изложенным выше, находим, что узлов у фермы нет, а для сечения В составляется одно уравнение проекций на вертикаль. Далее, поскольку АЖТ не закреплено неподвижным шарниром, то рассуждения о двух реакциях, приведенные выше, не имеют места: в шарнире С может возникнуть только горизонтальная реакция. Для данной задачи нетрудно видеть, что она равна нулю, но мы будем составлять уравнения так, что доказывать это утверждение не потребуется.

В самом деле, согласно советам, для АЖТ составляются два уравнения равновесия: сумма проекций сил на вертикаль и сумма моментов. Если точку, относительно которой составляется последнее уравнение, выбрать на оси АЖТ, то есть на линии действия горизонтальной реакции, то последняя в уравнение не войдет, даже если будет отлична от нуля. Так мы и поступим позже.

Итак, имеем три уравнения равновесия и четыре (по числу участков тяг) неизвестных. Таким образом, ферма единожды ($4 - 3 = 1$) статически неопределима.

Проверим этот вывод методом снятия тяг. Начнем с левой (Рис. 4, а). Никаких видимых нарушений принципа начальных размеров не наблюдается. Теперь уберем правую тягу. Шарнир С, запрещающий только горизонтальное перемещение, будет двигаться по вертикали (вниз, как на Рис. 4, б, или вверх – безразлично), и его перемещение придет в явное противоречие с принципом начальных размеров.

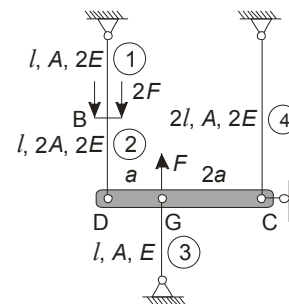


Рис. 3

Таким образом, возвращаясь от текущего положения на два шага назад, приходим к тому же выводу – ферма изначально один раз статически неопределима. Предлагается самостоятельно получить тот же результат, убирая тяги в другой последовательности (скажем, сначала средняя, потом правая, или левая и средняя соответственно).

Итак, первый этап – вычисление степени статической неопределимости – пройден. Вторым этапом, как правило, идет выбор так называемой кинематической схемы (или схемы перемещений). Кинематическая схема – один из возможных видов деформированной системы без учета внешних сил.

На Рис. 5 показаны пять из множества кинематических схем. Перемещения умышленно, в целях наглядности, нарушают принцип начальных размеров. Черной линией показано исходное положение АЖТ, цветными – его возможные положения после деформирования. Знаки слева относятся к удлинениям на участках 1...4 соответственно. Следует напомнить, что положительным считается удлинение, а отрицательным – укорочение.

Может показаться, что схема 2 противоречит здравому смыслу: в самом деле, к левой тяге приложена сила, направленная вниз, поэтому точка D должна опуститься, а точка G под действием силы F должна подняться. Схема 2 опровергает оба этих утверждения. Однако она имеет такое же право на существование, как и любая другая, что будет доказано ниже.

Вообще, внешние силы не следует принимать во внимание по двум причинам. Во-первых, при соблюдении правил составления и решения уравнений результат будет верен вне зависимости от них, что будет также продемонстрировано позже. Во-вторых, предугадать истинный вид деформированной системы можно только для очень простых задач, к каковым данная не относится.

Каков же критерий выбора одной из многочисленных кинематических схем? Можно пользоваться простым соображением: выбирать такую, в которой наибольшее число усилий положительно. То есть удобно взять схему 3 или 4. Остановимся на четвертой.

Согласно ей участки 1, 2 и 4 растянуты, а участок 3 сжат. Знаки усилий по участкам, как видно из рисунка, будут +, +, – и + соответственно. Теперь можно использовать метод сечений, направляя силы в строгом соответствии с выбранной кинематической схемой (Рис. 6). Уравнения равновесия, число и вид которых мы согласовали ранее, таковы:

$$\begin{aligned} \sum F_y = N_1 - 2F - N_2 = 0 & \quad (\text{сечение В}) \\ \sum F_y = N_2 + F + N_3 + N_4 = 0 & \quad (\text{АЖТ}) \\ \sum M_G = N_2 \cdot a - N_4 \cdot 2a = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Выбор точки G при составлении уравнения моментов продиктован соображением простоты: в этой точке приложены сразу две силы, поэтому они в уравнение моментов не войдут. Любая другая точка введет в уравнение равновесия 3 или даже все 4 силы, хотя окончательный результат, разумеется, будет тем же.

Получилось три уравнения равновесия (1) с четырьмя неизвестными: N_1 , N_2 , N_3 и N_4 . Следовательно, нужно составить еще одно (согласно первой степени статической неопределимости) уравнение, которое носит название уравнения совместности перемещений (или деформаций).

Физический смысл этого уравнения прост: удлинения тяг не могут происходить независимо друг от друга. Это высказывание неприменимо к статически определимым конструкциям. В самом деле, вернемся к расчетной схеме Рис. 2, а (напомним, она статически определима). Допустим, тяга ВК по каким-либо причинам удлинилась (например, вследствие нагрева). Тогда узел В переместится и займет положение В' (Рис. 7). Тяга ВР просто повернется, не испытывая деформаций. Что же касается АЖТ и тяги DG, то они вообще «не почувствуют» удлинения тяги ВК. Напряжения во всех тягах также останутся прежними. Значит, перемещения в статически определимых конструкциях не являются зависимыми, то есть совместными, и уравнения совместности перемещений для них записать нельзя.

Напротив, в статически неопределимых системах воздействие на хотя бы один элемент «становится известным» всем остальным элементам. Таким образом, уравнение совместности перемещений становится математическим выражением этой взаимной зависимости.

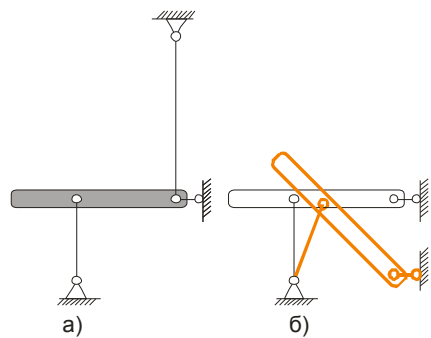


Рис. 4

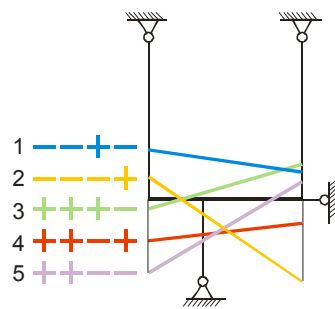


Рис. 5

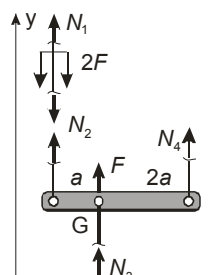


Рис. 6

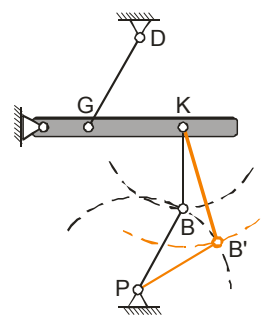


Рис. 7

Прежде, чем записывать уравнение совместности перемещений, бывает полезно сформулировать условие совместности перемещений. В данном случае это условие может быть выражено следующей фразой: «Отрезок, соединяющий точки С и D до деформирования, остается прямым после деформирования». Это условие есть простое иное изложение того факта, что АЖТ является абсолютно жестким, то есть недеформируемым, телом.

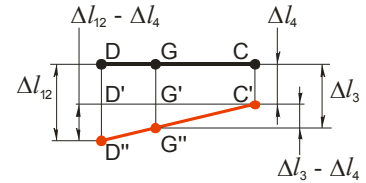


Рис. 8

Черной линией на Рис. 8 показано исходное положение АЖТ, красной – новое. Через Δl_{12} обозначено удлинение левой тяги:

$$\Delta l_{12} = \Delta l_1 + \Delta l_2 \quad (2)$$

Треугольники $D'C'D''$ и $G'C'G''$ подобны, поскольку у них два общих угла: прямой и острый – при вершине C' . Следовательно, равны отношения их одноименных катетов:

$$\frac{D'D''}{G'G''} = \frac{D'C'}{G'C'}, \text{ то есть } \frac{\Delta l_{12} - \Delta l_4}{\Delta l_3 - \Delta l_4} = \frac{3a}{2a}$$

Сокращая a и раскрывая пропорцию, имеем:

$$2(\Delta l_{12} - \Delta l_4) = 3(\Delta l_3 - \Delta l_4) \quad (3)$$

И, наконец, используя уравнение (2), раскрывая скобки и перенося слагаемые в левую часть:

$$2\Delta l_1 + 2\Delta l_2 - 3\Delta l_3 + \Delta l_4 = 0 \quad (4)$$

Получилась система четырех уравнений (1) и (4) с восемью неизвестными: $N_1 \dots N_4, \Delta l_1 \dots \Delta l_4$. Остается воспользоваться законом Гука:

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, i = 1 \dots 4 \quad (5)$$

Он позволяет сократить порядок системы с восьми до четырех. После замены удлинений в уравнении (4) и сокращения на множитель $\frac{l}{EA}$, как явно отличный от нуля, получаем четвертое уравнение системы

$$\begin{cases} N_1 & -N_2 & & & = & 2F \\ & N_2 & +N_3 & +N_4 & = & -F \\ & N_2 & & -2N_4 & = & 0 \\ N_1 & +\frac{1}{2}N_2 & -3N_3 & +N_4 & = & 0 \end{cases}$$

Первые три уравнения следуют из формул (1) соответственно, после упрощений и переноса известных величин в правую часть.

Итак, получена система четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Подобные системы (порядка больше двух) удобно решать методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -3 & 1 \end{vmatrix} = -13; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2F & -1 & 0 & 0 \\ -F & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16F; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2F & 0 & 0 \\ 0 & -F & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 10F;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2F & 0 \\ 0 & 1 & -F & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2F; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2F \\ 0 & 1 & 1 & -F \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -3 & 0 \end{vmatrix} = 5F$$

Откуда следует:

$$N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16}{13}F; \quad N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{10}{13}F; \quad N_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{13}F; \quad N_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -\frac{5}{13}F$$

Знаки усилий в полученных результатах являются формальными. Знак «минус» говорит о том, что усилие направлено противоположно тому, как это указано на схеме сил Рис. 6. Положительный знак свидетельствует о том, что соответствующее усилие направлено так, как в действительности.

Значит, необходимо приписать всем усилиям знаки согласно их механическому, а не математическому смыслу. Начнем с первого. На схеме сил оно показано растягивающим, а усилие N_1 тоже получилось положительным. Значит, оно в самом деле растягивающее. Второе усилие показано растягивающим, но получилось отрицательным. Таким образом, усилие N_2 – сжимающее. Третье усилие предполагалось сжимающим (единственное из всех), и положительный знак показывает, что

направление указано верно, и фактически третья тяга сжата. Рассуждая аналогично, находим, что четвертая тяга также сжата.

К этому выводу можно также прийти формально, перемножая знаки. Берем со схемы сил усилие и, если оно показано растягивающим, приписываем ему знак «плюс», и «минус» для сжатия. Затем перемножаем эти знаки на знаки усилий, полученные при решении системы уравнений:

$$N_1: + \cdot + = +, N_2: + \cdot - = -, N_3: - \cdot + = -, N_4: + \cdot - = -$$

Таким или иным образом, результаты расчета усилий имеют вид:

$$N_1 = \frac{16}{13}F \text{ (растяжение); } N_2 = -\frac{10}{13}F \text{ (сжатие); } N_3 = -\frac{2}{13}F \text{ (сжатие); } N_4 = -\frac{5}{13}F \text{ (сжатие)} \quad (6)$$

Становится понятным, почему удобно, чтобы большинство удлинений (в идеале – все) на кинематической схеме были положительными. Тогда можно, получив решение, сразу приписывать знаки усилиям, без оглядки на схему сил: отрицательное усилие является сжимающим, положительное – растягивающим. Правда, подобрать такую кинематическую схему удается далеко не всегда – так и случилось с решаемой задачей. В этом случае, вообще говоря, можно брать первую попавшуюся кинематическую схему.

Обратим внимание, что во всех кинематических схемах предполагалось, что первый и второй участки получают удлинения одного знака. А что будет, если, находясь в рамках той же кинематической схемы, изначально предположить, что на участке 2 действует сжимающее усилие (как это и есть на самом деле)?

Схема сил показана на Рис. 9. Кинематическая схема (Рис. 8) и уравнение совместности перемещений (3) останутся прежними. Изменяются, во-первых, знаки в уравнениях равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= N_1 - 2F + N_2 = 0 \\ \sum F_y &= -N_2 + F - N_3 + N_4 = 0 \\ \sum M_G &= N_2 \cdot a + N_4 \cdot 2a = 0 \end{aligned}$$

и, во вторых, в величину Δl_{12} будет вложен другой смысл: вместо уравнения (2) получим:

$$\Delta l_{12} = \Delta l_1 - \Delta l_2$$

Предлагается самостоятельно решить полученную систему уравнений и убедиться, что ответ окажется тем же – (6).

Докажем теперь, что и выбор кинематической схемы на окончательный результат не влияет. Для примера рассмотрим ту самую «нелогичную», под номером 2.

Схема сил, соответствующая данной кинематической, изображена на Рис. 10, а. Вместо системы уравнений (1) имеем следующую:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= -N_1 - 2F + N_2 = 0 \\ \sum F_y &= -N_2 + F + N_3 + N_4 = 0 \\ \sum M_G &= N_2 \cdot a + N_4 \cdot 2a = 0 \end{aligned}$$

Уравнение совместности перемещений составляем согласно Рис. 10, б):

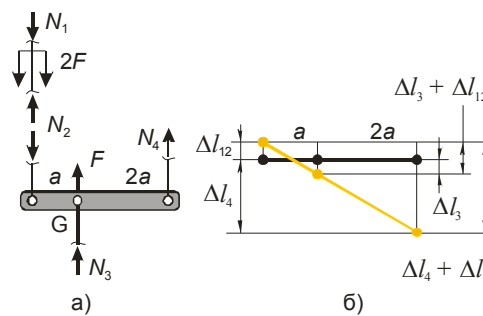
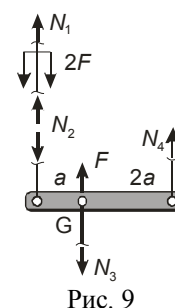
$$\frac{\Delta l_4 + \Delta l_{12}}{\Delta l_3 + \Delta l_{12}} = \frac{3a}{a}$$

После преобразований приходим к матричной форме записи системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{vmatrix} = -13; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2F & 1 & 0 & 0 \\ -F & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{vmatrix} = 16F; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2F & 0 & 0 \\ 0 & -F & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -10F;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2F & 0 \\ 0 & -1 & -F & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2F; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2F \\ 0 & -1 & 1 & -F \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{vmatrix} = 5F$$

Формальные знаки усилий:



$$N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{16}{13}F; \quad N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{13}F; \quad N_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{13}F; \quad N_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -\frac{5}{13}F$$

$$N_1: \dots = +, N_2: \dots = -, N_3: \dots = -, N_4: \dots = -$$

То есть получен тот же результат (6). Предлагается самостоятельно решить задачу, используя кинематическую схему под номером 1, 3 или 5 (Рис. 5).

Существует еще один подход к согласованию силовой и кинематической схем. На силовой все усилия направляются от сечения, то есть считаются положительными. Далее, составляются уравнения равновесия и совместности перемещений. Но запись закона Гука для каждого участка отличается от формулы (5), а именно – если удлинение согласно кинематической схеме является отрицательным (укорочение), то в законе Гука ставится знак «минус».

Схема сил имеет вид Рис. 11 и не зависит от кинематической схемы. Уравнения равновесия приобретают вид:

$$\sum F_y = N_1 - 2F - N_2 = 0$$

$$\sum F_y = N_2 + F - N_3 + N_4 = 0$$

$$\sum M_G = N_2 \cdot a - N_4 \cdot 2a = 0$$

Уравнение совместности перемещений имеет прежнюю (для кинематической схемы 4) форму (4). Согласно выбранной кинематической схеме тяга 3 сжата, то есть в формуле закона Гука для нее будет стоять минус:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{2E \cdot A}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{2E \cdot 2A}; \quad \Delta l_3 = -\frac{N_3 l}{E \cdot A}; \quad \Delta l_4 = \frac{N_4 2l}{2E \cdot A}$$

После преобразований получаем матричное решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{vmatrix} = 13; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2F & -1 & 0 & 0 \\ -F & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{vmatrix} = 16F; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2F & 0 & 0 \\ 0 & -F & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -10F;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2F & 0 \\ 0 & 1 & -F & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2F; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2F \\ 0 & 1 & -1 & -F \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{vmatrix} = -5F$$

В данном методе решения, поскольку все усилия изначально положительны, менять знаки результатов решения уравнений не нужно. Таким образом, получен тот же ответ (6).

Рассмотренные два подхода являются, по большому счету, равноценными, и выбор того или иного определяется прежде всего привычкой исполнителя. В первом знаки при усилиях расставляются после решения системы уравнений, во втором – при записи формул удлинений согласно закону Гука. Однако во втором подходе есть небольшая некорректность.

Закон Гука, как известно, справедлив и при растяжении, и при сжатии. В первом случае удлинение положительно, равно как и растягивающее усилие. Во втором случае укорочение имеет тот же знак, что и сжимающее усилие. То есть в законе Гука всегда должен стоять знак «плюс» (5). Второй подход отступает от указанного правила.

Мы же поступим традиционным образом и проведем так называемую кинематическую проверку. Она заключается в наглядном графическом изображении истинной кинематической схемы.

Согласно формулам (5) и (6) удлинения равны:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{2E \cdot A} = \frac{16}{13}F \frac{l}{2EA} = \frac{8}{13} \frac{Fl}{EA} \text{ (удлинение);} \quad (7)$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{2E \cdot 2A} = -\frac{10}{13}F \frac{l}{4EA} = -\frac{5}{26} \frac{Fl}{EA} \text{ (укорочение);}$$

$$\Delta l_{12} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{8}{13} \frac{Fl}{EA} - \frac{5}{26} \frac{Fl}{EA} = \frac{11}{26} \frac{Fl}{EA} \text{ (удлинение);} \quad (8)$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{E \cdot A} = -\frac{2}{13}F \frac{l}{EA} = -\frac{2}{13} \frac{Fl}{EA} \text{ (укорочение);} \quad (9)$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l}{2E \cdot A} = -\frac{5}{13}F \frac{2l}{2EA} = -\frac{5}{13} \frac{Fl}{EA} \text{ (укорочение)}$$

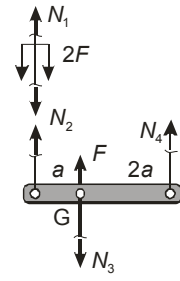


Рис. 11

Далее на листе клетчатой бумаги выбираем масштаб. В данном случае удобно взять одну клетку равной $\frac{1}{26} \frac{Fl}{EA}$. Тогда удлинение левой тяги будет изображаться отрезком, равным 11 клеткам, средней – 4 клеткам, правой – 10 клеткам (на Рис. 12 – 5.5, 2 и 5 соответственно). Масштаб по горизонтали произволен. На Рис. 12 черным цветом показано исходное положение АЖТ, красным – направления и величины перемещений. Линия, соединяющая положения шарниров D, G и С после деформирования (зеленым) должна получиться прямой – в этом и состоит проверка.

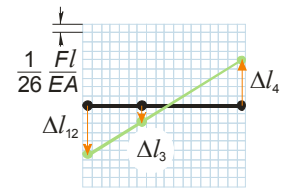


Рис. 12

Отметим, что из показанных на Рис. 5 кинематических схем истине соответствует схема 5. Отличие состоит в том, что схема перемещений на Рис. 12 – точная.

Кинематическая проверка при всей ее наглядности не отличается большой надежностью. Поэтому необходимо провести куда более трудоемкую, но, соответственно, и более достоверную – энергетическую.

Силы, приложенные к деформируемому телу и возрастающие от нуля до конечного значения, совершают работу, равную

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_{Fi}, \quad (10)$$

где n – число обобщенных внешних сил, δ_{Fi} – обобщенное перемещение точки приложения i -ой силы.

Внешние силы заставляют конструкцию изменять свою форму и размеры, тем самым накапливая в себе потенциальную энергию, равную

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{N_i^2 l_i}{E_i A_i} \quad (11)$$

Здесь m – число участков постоянного усилия.

При подсчете работы очень важно правильно применить правило знаков. Оно звучит так: если перемещение точки приложения силы сонаправлено с последней, то работа считается положительной, если же эта точка перемещается против силы, то работа берется со знаком «минус».

Точка В приложения силы $2F$ переместится на величину, равную удлинению первого участка левой тяги (Δl_1). Как видно из формулы (7), участок удлинился, то есть точка В переместилась вниз, вдоль силы. Значит, ее работа положительна.

Тяга 3, как видно из формулы (9), укоротилась, поэтому точка G переместилась вниз. Значит, сила F , приложенная в той же точке и направленная вверх, совершит отрицательную работу.

Таким образом, из (10) с учетом (7) и (9) следует:

$$W = \frac{1}{2} (2F \cdot \Delta l_1 - F \cdot \Delta l_3) = \frac{1}{2} \left(2F \cdot \frac{8}{13} \frac{Fl}{EA} - F \cdot \frac{2}{13} \frac{Fl}{EA} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} \frac{F^2 l}{EA} (2 \cdot 8 - 2) = \frac{7}{13} \frac{F^2 l}{EA} \quad (12)$$

Из формулы (11) с учетом (6) получаем:

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{N_1^2 l}{2E \cdot A} + \frac{N_2^2 l}{2E \cdot 2A} + \frac{N_3^2 l}{E \cdot A} + \frac{N_4^2 2l}{2E \cdot A} \right) = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{16}{13} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(-\frac{10}{13} \right)^2 + \left(-\frac{2}{13} \right)^2 + \left(-\frac{5}{13} \right)^2 \right] = \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 13^2} \frac{F^2 l}{EA} \left[\frac{256}{2} + \frac{100}{4} + 4 + 25 \right] = \frac{182}{2 \cdot 169} \frac{F^2 l}{EA} = \frac{7}{13} \frac{F^2 l}{EA}$$

При статическом нагружении, когда кинетической энергией можно пренебречь, $U = W$. Из формул (12) и (13) видно, что энергетическая проверка сошлась.

Наконец, можно приступить к расчету на прочность. Напряжения в тягах равны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{16}{13} \frac{F}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{10}{13} F \cdot \frac{1}{2A} = -\frac{5}{13} \frac{F}{A}; \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{2}{13} \frac{F}{A}; \quad \sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = -\frac{5}{13} \frac{F}{A}$$

Напомним, что все тяги стальные, кроме третьей – медной. Обозначим для простоты $\sigma_{Тм} = 100$ МПа = σ_T , $\sigma_{Тс} = 300$ МПа = $3\sigma_T$. Известно, что пределы текучести являются константами материала, определяемыми экспериментально, и не следует ожидать, что для реальных материалов их отношение окажется в точности равным целому числу (в нашем случае 3). Такие исходные данные традиционно используются лишь для упрощения расчетов. То же относится и к модулям Юнга.

Итак, находим площадь поперечного сечения медной тяги из условия прочности:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{2}{13} \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{2}{13} \frac{F \cdot n_T}{\sigma_T}$$

Тот же расчет для стальных тяг требует предварительного поиска участка, на котором напряжение максимально:

$$\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_4|) = \max\left(\frac{16 F}{13 A}, \frac{5 F}{13 A}, \frac{5 F}{13 A}\right) = \frac{16 F}{13 A} = \frac{3\sigma_T}{n_T} \rightarrow A = \frac{16 F \cdot n_T}{39 \sigma_T} \quad (14)$$

Все напряжения при расчете на прочность в данном случае берутся с плюсом, потому что в качестве предельного напряжения для каждого из материалов задано по одному числу. Следовательно, предполагается, что их пределы текучести при растяжении и при сжатии равны.

Получены два значения площади поперечного сечения. По определению напряжение тем больше, чем меньше площадь, значит, слабое звено конструкции то, где площадь из условия прочности максимальна. Поскольку $\frac{16}{39} > \frac{2}{13}$, то расчет на прочность следует выполнять по формуле (14).

Подставляя числовые данные, имеем:

$$A = \frac{16 F \cdot n_T}{39 \sigma_T} = \frac{16}{39} \cdot \frac{10^4 \text{ Н} \cdot 1.5}{100 \text{ МПа}} = 61.54 \text{ мм}^2$$

Слабое звено конструкции – участок 1. Все сечения участка равноопасны.