Задача на равнопрочность с множеством решений

Дана балка (Рис. 1). Найти k из условия равнопрочности.

Прежде чем решать задачу «в лоб», полезно приблизительно предвосхитить результаты – это позволит избежать, во-первых, лишних расчетов, а во-вторых, ошибок – следует насторожиться, если точные результаты будут резко отличаться от прогноза.

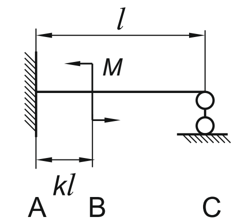

Рис. 1

Эпюра моментов после раскрытия статической неопределимости будет иметь 2 участка и 3 характерных момента (Рис. 2 – один из примеров):

M_1 – момент в заделке;

M_2 – момент слева от сечения B;

M_3 – момент справа от сечения B.

Равнопрочность будет достигнута, когда хотя бы два из трех моментов будут равны друг другу по модулю.

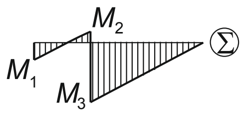

Рис. 2

Возможен ли случай $M_1 = M_2$? Если да, то это означает, что эпюра на участке AB горизонтальна. Но тогда на участке BC она тоже должна быть горизонтальна, поскольку поперечная сила по всей балке постоянна и по модулю равна реакции шарнира C. Горизонтальность обоих участков эпюры невозможна хотя бы потому, что эта реакция явно отлична от нуля – более того, поскольку внешний силовой фактор всего один, можно предвидеть, что реакция будет направлена вниз.

Теперь рассмотрим случай

$$M_1 = -M_2 \tag{1}$$

Раз реакция шарнира направлена вниз, значит, эпюра моментов возрастает на всей балке, и тогда получается, что $M_1 < 0$, $M_2 > 0$. К анализу этого случая мы вернемся чуть позже.

Вторая пара моментов, равенство модулей которых может дать искомую равнопрочность – это M_1 и M_3. Прежде всего, очевидно, что $M_3 < 0$: невозможно, возрастая от положительной величины, прийти в нуль. Что же касается M_1, то он может иметь любой знак. Это еще два потенциальных случая равнопрочности.

Со случаем равенства M_2 и M_3 все проще: их разность равна M, кроме того, как мы уже знаем, $M_3 < 0$. Поэтому единственный возможный случай

$$M_2 = \frac{M}{2}; \qquad M_3 = -\frac{M}{2}$$

и неизвестно заранее, сколько раз этот случай будет реализован.

Задача единожды статически неопределима. В качестве основной системы выберем ту, где разрешено вертикальное перемещение сечения A (Рис. 3). Вместо заделки получаем расчетную схему, называемую шпингалетом. Эквивалентная система Рис. 4. Для конструкций типа «заделка+шарнир» подобная ОС, как правило, позволяет получить самые простые эпюры (Рис. 5). В данном случае, правда, ОС типа «консоль» дает эпюры точно такие же.

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1F} = 0; \qquad \delta_{11} = \frac{1}{3} l^3; \qquad \delta_{1F} = \frac{1}{2} k(2-k) M l^2; \qquad X_1 = \frac{3}{2} k(2-k)\frac{M}{l}$$

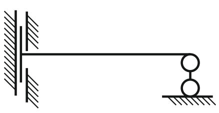

Рис. 3

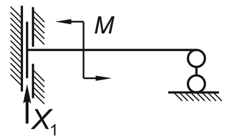

Рис. 4

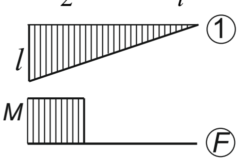

Рис. 5

Обозначив $X = X_1$, получаем выражения для введенных ранее трех моментов (с точностью до размерности):

$$M_1 = 1 - X; \qquad M_2 = 1 - X(1-k); \qquad M_3 = -X(1-k)$$

Их зависимости от k показаны на Рис. 6.

Как и предполагалось, случай $M_1 = M_2$ достигается только при $k \to 0$, однако предельные, они же тривиальные, решения практического интереса не представляют.

Для наглядного изучения случая (1) построим график функции $M_1 + M_2$ в зависимости от k (Рис. 7), или, с той же целью, найдем корни уравнения

$$2 - \frac{3}{2} k \left(2-k\right)^2 = 0$$

Видно, что на интересующем нас участке 0…1 уравнение (1) корней не имеет.

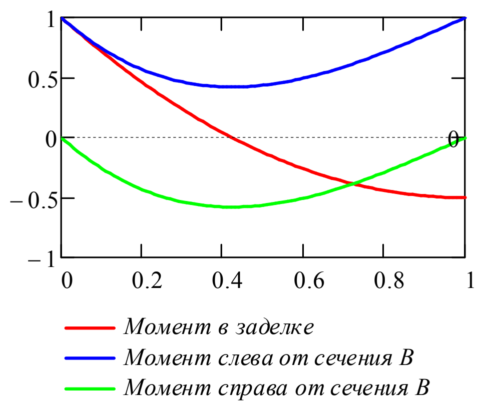

Рис. 6

Гораздо интереснее с равенством первого и третьего моментов (Рис. 8). Красная кривая – их сумма, то есть ее пересечение нулевой линии соответствует корню уравнения

$$-3k(2-k)+\frac{3}{2}k^2(2-k)+1=0$$

и этот корень равен 0.207.

Синяя кривая есть график функции M_1 - M_3, и пересечение нуля соответствует корню уравнения

$$1-\frac{3}{2}k^2(2-k)=0$$

который равен 0.722.

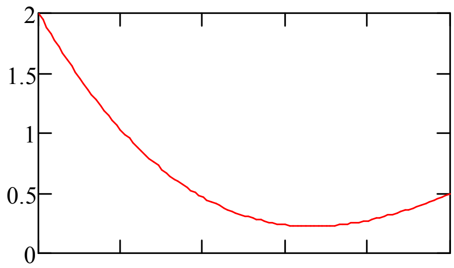

Рис. 7

Наконец, график функции $M_2 + M_3$ представлен на Рис. 9. Необходимо найти корни уравнения

$$1-3k(1-k)(2-k)=0$$

Численное решение дает корни 0.258 и 0.605.

Полученные результаты сведем в таблицу.

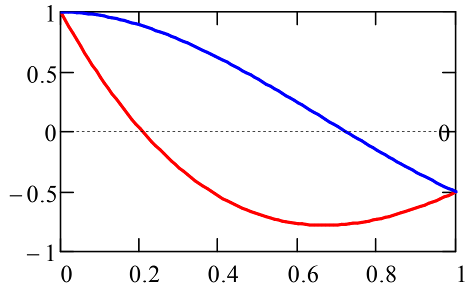

Рис. 8

№	k	M_1	M_2	M_3
1	0.207	0.442	0.558	-0.442
2	0.258	0.326	0.5	-0.5
3	0.605	-0.266	0.5	-0.5
4	0.722	-0.384	0.616	-0.384

Красным в одной строке выделены значения одинаковых по модулю моментов, синим обозначен максимальный момент, превышающий равные.

Случаи 1 и 4 являются решениями лишь формально. Да, равнопрочность обеспечена, но ведь получение равных значений момента само по себе смысла не имеет.

При равнопрочности напряжения должны быть не просто равны, но максимальны, то есть характеризовать опасные сечения. Но если для данной конструкции можно предложить несколько способов достижения равнопрочности, то выбирать следует тот, где те самые равные моменты достигают, напротив, наименьших значений.

Случаи 2 и 3 этому условию удовлетворяют.

Графически итоги подведены на Рис. 10.

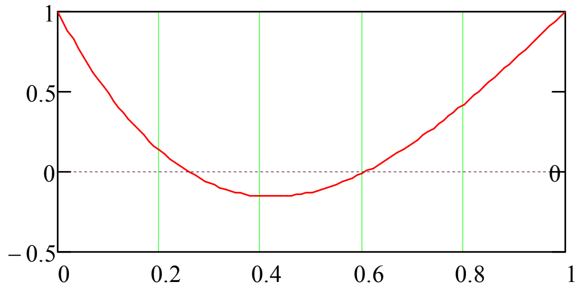

Рис. 9

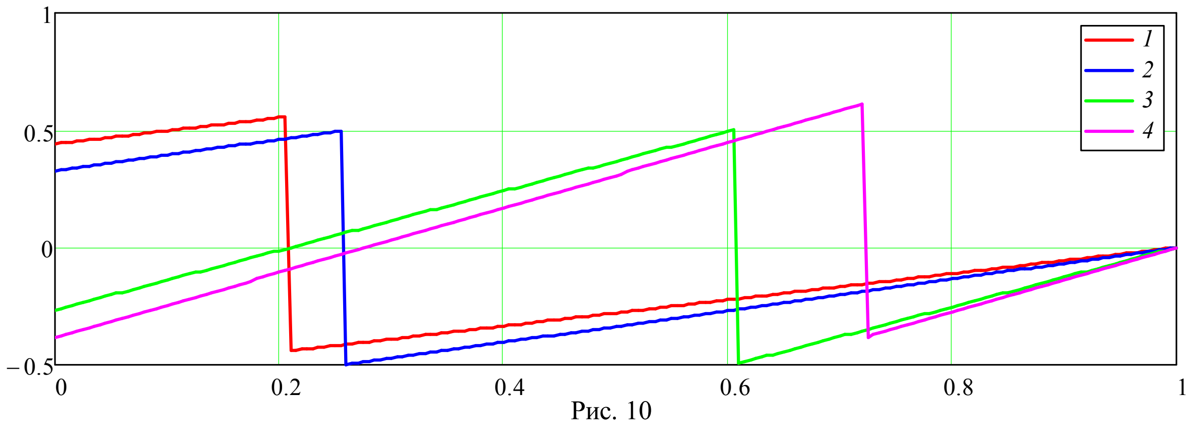

Рис. 10

Как уже указывалось, практический интерес представляют графики моментов, изображенные синим и зеленым цветами.

Именно для этих значений k теми же цветами построены изогнутые оси (Рис. 11). Как видно, они существенно отличаются друг от друга.

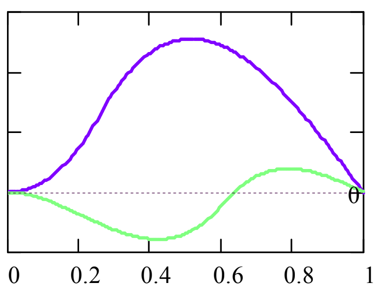

Рис. 11