Равнопрочность и «равножёсткость» балки. Точки Эйри и Бесселя

Понятие равнопрочности в среде механиков-прочнистов известно хорошо, причем идея равнопрочности для них является, в определенном смысле, предметом поклонения. Поиск условий равнопрочности есть вид вечного стремления творца к совершенству своего детища. Равнопрочность – состояние конструкции, когда прочность (то есть расчётный коэффициент запаса) во всех точках конструкции одинакова. Такое идеальное состояние (его иногда называют «абсолютной равнопрочностью») почти никогда не может быть достигнуто на практике, и стремятся обеспечить хотя бы равнопрочность относительную, то есть прочность одинаковую в двух (а лучше – в трёх, четырёх, и так далее) самых опасных точках конструкции.

А вот термин «равножёсткость» известен мало, если известен вообще. И если смысл его ясен хотя бы по аналогии, то в справочниках такого определения найти не удалось. И немудрено: если равнопрочность есть идеал в проектировании и расчёте конструкций, то достижение равножёсткости, на первый взгляд, никаких выгод не приносит. Более того – если абсолютная равнопрочность достижима хотя бы теоретически, то абсолютная равножёсткость деформируемых тел невозможна в принципе.

Рассмотрим в качестве примера задачу 2.13 [1] (Рис. 1), но посмотрим на неё несколько шире, чем это задумывалось авторами.

Необходимо найти такие значения k, при которых достигаются состояния а) равнопрочности; б) равножёсткости.

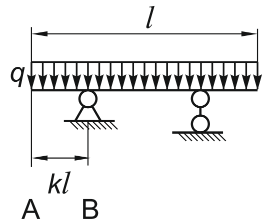

Рис. 1

Вначале воспользуемся симметрией и рассмотрим левую половину балки (Рис. 2). Напомним, что связь в сечении C запрещает поворот, который невозможен в исходной конструкции по соображениям прямой симметрии, поскольку функция θ является кососимметричной.

Если k будет стремиться к нулю, а опора, следовательно, «отъезжать» ближе к сечению A, мы в пределе получим половину обычной шарнирно опёртой балки (без свесов, то есть свободных концов вне опор). И поскольку сжатые слои будут всюду находиться сверху, то добиться равнопрочности в такой конструкции невозможно.

Если же, наоборот, k стремится к $\frac{1}{2}$, то опора двигается к сечению симметрии, давая в пределе заделку, сжатые слои оказываются только снизу и равнопрочность вновь оказывается недостижимой. Значит, при некотором промежуточном k окажется, что наибольший момент сверху оси будет иметь ту же величину, что и максимальный момент снизу, причем первый будет расположен в сечении C, а два последних – над опорами.

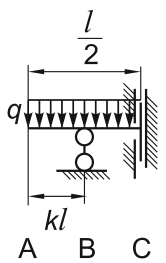

Рис. 2

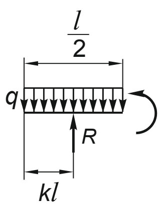

Рис. 3

Из проекции сил на вертикаль (Рис. 3) следует

$$R = \frac{1}{2}ql\,,$$

причем искать момент в сечении C нет необходимости. Далее применяем метод Коши-Крылова:

$$M_x(z) = -q\frac{z^2}{2} + H(z-kl)\frac{1}{2}ql(z-kl) \qquad (1)$$

$$EI_x\theta(z) = -q\frac{z^3}{6} + H(z-kl)\frac{1}{2}ql\frac{(z-kl)^2}{2} + C_1$$

$$EI_x v(z) = -q\frac{z^4}{24} + H(z-kl)\frac{1}{2}ql\frac{(z-kl)^3}{6} + C_1 z + C_2 \qquad (2)$$

Граничные условия:

$$v(kl) = 0 \to -q\frac{(kl)^4}{24} + C_1 kl + C_2 = 0$$

$$\theta\left(\frac{1}{2}l\right) = 0 \to -q\frac{\left(\frac{1}{2}l\right)^3}{6} + \frac{1}{2}ql\frac{\left(\frac{1}{2}l - kl\right)^2}{2} + C_1 = 0$$

Решая эти уравнения совместно, после преобразований получаем:

$$C_1 = \frac{1}{4}\left(-k^2 + k - \frac{1}{6}\right)ql^3$$

$$C_2 = \frac{1}{4}k\left(\frac{k^3}{6} + k^2 - k + \frac{1}{6}\right)ql^4 \tag{3}$$

Для решения задачи о равнопрочности было достаточно формулы (1):

$$M_B = M_x(kl) = -q\frac{(kl)^2}{2};\ M_C = M_x\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{1}{2}ql^2\left(\frac{1}{4} - k\right)$$

Как и следовало ожидать, первый из моментов получился отрицательным, второй – положительным (если только $k < 0.25$). Поскольку свойства материала при растяжении и сжатии предполагаются одинаковыми, условие равнопрочности имеет вид $|M_B| = |M_C|$, откуда после преобразований получаем квадратное уравнение относительно k:

$$k^2 + k - \frac{1}{4} = 0,$$

корни которого

$$k_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}; \qquad k_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \approx 0.207$$

Первый корень не является корректным решением, поскольку kl – расстояние, и не может быть отрицательным. Второй, единственный, корень, есть решение задачи о равнопрочности, демонстрация которой приведена на Рис. 4.

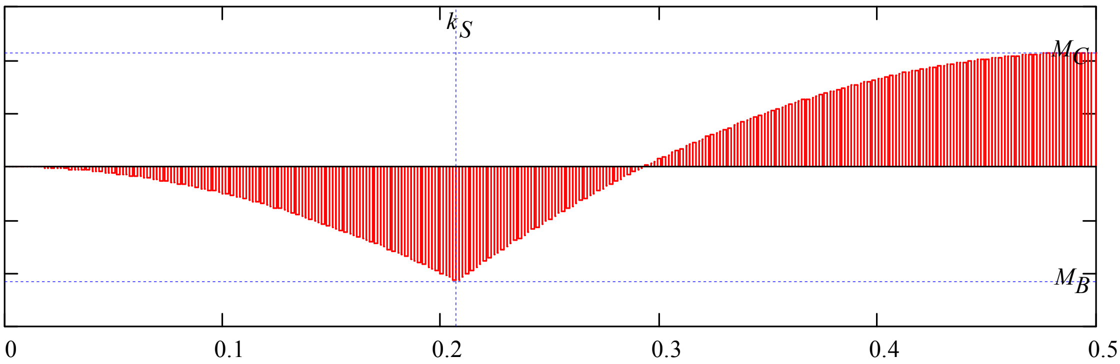

Рис. 4

(Заодно можно убедиться, что $k < 0.25$). Найденное значение будем в дальнейшем обозначать k_S.

Интересно проследить за величиной максимального момента при изменении k (Рис. 5). Зеленая линия – момент в сечении C, уменьшающийся по линейному закону с $\frac{1}{8}ql^2$ до $-\frac{1}{8}ql^2$. Синяя кривая – момент под опорой, равный нулю в шарнирно опёртой балке без свесов, и затем стремящийся к той же величине. Наконец, красная кривая – момент в опасной точке, то есть наибольшее значение модулей двух вышеописанных моментов.

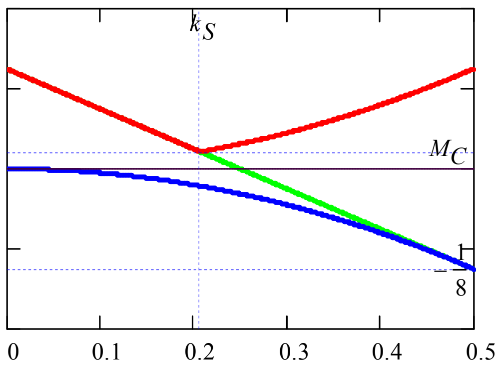

Рис. 5

Очевидно, что момент в опасной точке достигает минимума при том же самом значении k, равном k_S. Само опасное сечение при меньших k совпадает с сечением C, при бóльших – находится над опорой.

То есть получается, что найденное значение не только даёт одинаковую прочность в двух возможных опасных сечениях, но и обеспечивает прочность, наибольшую по абсолютной величине.

Теперь приступим к задаче о равножёсткости. Очевидно, что как края балки, так и сечение симметрии, будут иметь наибольшие прогибы. То значение k, при котором они будут равны, и даст нам ответ на вопрос о равножёсткости. Но имеет ли практический смысл подобная задача?

Если прочность конструкции однозначно описывается коэффициентом запаса в опасной точке (или, что то же самое, минимальным для конструкции коэффициентом запаса), то к жёсткости такой подход в общем случае неприменим. Во-первых, о каком перемещении идёт речь: о линейном или угловом? Если о линейном, это прогиб (тогда вдоль какой оси?) или осевое перемещение? А если об угловом, то вряд ли стоит проводить параллель между углом закручивания и углом поворота касательной –

слишком уж отличаются эти углы по физическому смыслу. Впрочем, как и продольное и поперечное линейные перемещения…

Во-вторых, если точка, в которой достигается минимальный коэффициент запаса (опасная точка) – особенное место конструкции, в котором она перейдёт в предельное состояние, то точка с наибольшим перемещением вряд ли чем-то физически отличается от любой другой.

Наконец, в-третьих, поиск максимальной величины перемещения (с учетом вышеизложенных оговорок) может быть крайне сложен. А если мы вспомним, что кроме стержневых, есть ещё оболочечные конструкции и тела общего вида, то для них подобная задача в общем случае выглядит вовсе не поддающейся решению.

Обратимся к первоисточнику [1]: «Жёсткость наибольшая (прогибы минимальны), когда перемещение крайних сечений равно перемещению среднего сечения балки».

И хотя намного яснее от этого не стало (что значит прогибы минимальны? в каких сечениях?), такой подход позволяет поставить задачу, имеющую хоть какую-то практическую пользу.

А именно: пусть заданную балку необходимо «втиснуть» в наиболее узкий канал или паз, причем так, чтобы она не касалась его стенок. Единственное, что при этом можно менять – положение опор.

Подставляя в функцию (2) значения z, равные $\frac{1}{2}l$ и нулю (или просто используя константу C_2) и приравнивая их, после преобразований получаем уравнение

$$\frac{32}{3}\left(k-\frac{1}{2}\right)^3-16k^2+16k-3=0$$

Решая его численно, находим значение k, которое мы в дальнейшем будем обозначать k_v, и равное 0.223. Интересно обратить внимание, что решать кубическое уравнение предлагалось студентам второго (!) курса в задачнике, изданном в 1980 году, когда о численных методах, как и о компьютерах, многие даже не слышали.

Итак, найденное значение k_v обеспечивает равные прогибы сечений А и С, но будет ли это решение оптимальным с точки зрения абсолютной величины прогиба?

На Рис. 6 показаны функции прогиба в сечениях А (красная кривая) и С (синяя) в зависимости от k. Мало того, что при значении k_v эти величины равны друг другу, так ещё обе близки к нулю, хотя и не равны ему (Рис. 7).

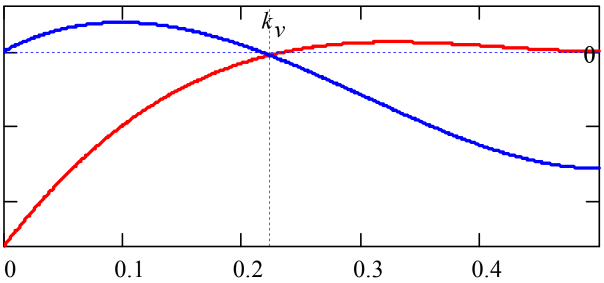

Рис. 6

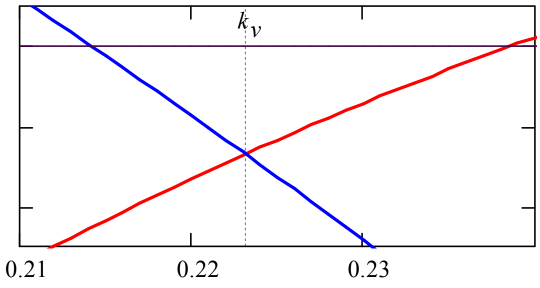

Рис. 7

Значит, при найденном значении k наибольшие прогибы на двух участках имеют наименьшую разность, то есть обеспечивают минимальный вертикальный «габарит» балки. Теперь понятно, что имели в виду авторы [1], которым дать полную формулировку не позволил формат книги. Более того, выявилось ещё одно сходство понятий равнопрочности и равножёсткости: равенство двух ключевых факторов (изгибающего момента и прогиба, соответственно) в тех сечениях, где они достигают максимумов, обеспечивает наименьшее по модулю значение того же фактора.

Теперь решим две задачи, имеющие ещё более туманное практическое значение: найти такие k, при которых первая и вторая константы интегрирования (или, что то же самое, угол и прогиб, соответственно, в начале координат) обращаются в нуль.

Первая задача требует решения квадратного уравнения

$$k^2-k+\frac{1}{6}=0,$$

имеющего два корня:

$$k_1=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\approx 0.211; \qquad k_2=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\approx 0.789$$

Второй корень кажется неподходящим, но это не совсем так. Заметив, что $k_2 = 1 - k_1$, мы видим, что два корня соответствуют двум опорам, находящимся на одинаковых расстояниях от концов балки. Нас в упрощенной постановке (Рис. 2) интересует меньший из корней, который мы обозначим k_θ.

Найденное значение соответствует точке, которое иногда называют «точкой Эйри», в честь нашедшего её английского математика Дж. Б. Эйри (1801-1882). Он заметил, что параллельность концов балки обеспечивает наибольшую точность измерения её длины.

Исследования Эйри нашли своё применение в метрологии, в частности, в разработке эталона метра, одной из основных единиц системы СИ.

Наконец, приравниваем нулю выражение для второй константы (3) и сокращаем на k. Этот случай соответствует тривиальному решению $k = 0$, то есть прогиб в начале координат в шарнирно опёртой балке без свесов равен нулю.

Но даже после сокращения на $k \neq 0$ уравнение остается кубическим. Численное его решение даёт корень $k_z = 0.214$.

Это решение связано с именем другого математика, немца Ф. В. Бесселя (1784-1846), и поэтому точки, отстоящие от концов балки на 0.214 её длины, называются точками Бесселя. Предлагая свой собственный эталон метра, он заметил, что балка, лежащая на двух опорах в указанных точках, сохраняет максимальную длину. Казалось бы, проще уложить балку на три, или даже больше, опоры, но Бессель доказал, что из-за их неравной высоты точность измерений снижается.

Здесь уместно вспомнить забавное бытовое наблюдение: столы, имеющие обычно четыре ножки, иногда шатаются, потому что невозможно обеспечить одинаковую длину всех четырёх ножек! А вот стол о трёх ножках не шатается никогда, потому что через три точки можно провести одну и только одну плоскость. Аналогично, на плоскости три точки никогда не окажутся лежащими на одной прямой, а две – всегда.

Подводим итоги. На Рис. 8 показаны упругие линии для всех рассмотренных случаев. Нижняя горизонтальная прямая соответствует прогибу сечений A и C, равных для случая равножёсткости (фиолетовая кривая). Можно визуально проверить нулевой прогиб зеленой кривой (решение Бесселя) в начале координат и там же – нулевой угол синей кривой (решение Эйри). Интересно, что все характерные значения k уложились в весьма узкий диапазон: всего 3.2%!

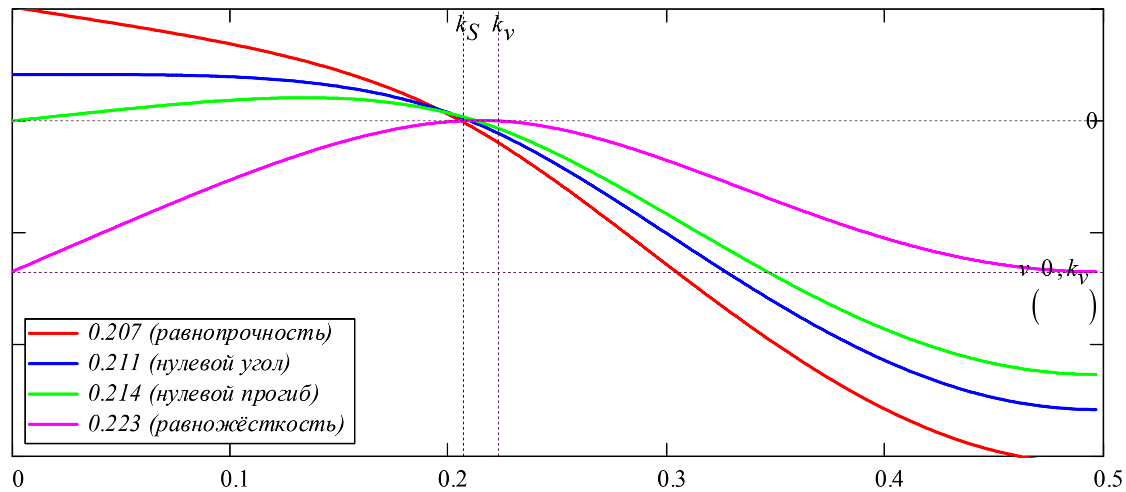

Рис. 8

Литература

1. Лихарев К. К., Сухова Н. А., Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов», М., Машиностроение, 1980