

Плоская рама с большой изгибной жесткостью стержней

Дана рама (Рис. 1). Все ее стержни изготовлены из одного материала и имеют одинаковые сечения, причем

$$A = 3 \cdot \frac{I_x}{l^2} \quad (1)$$

Необходимо построить эпюры внутренних силовых факторов.

Прежде всего оценим задачу с точки зрения соотношения изгибной и осевой жесткости. Рассмотрим для примера стержень круглого поперечного сечения:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad I_x = \frac{\pi d^4}{64} \rightarrow A = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{16}{d^2} \cdot \frac{l^2}{l^2} = 16 \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^2 \cdot \frac{I_x}{l^2}$$

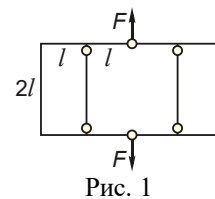


Рис. 1

По определению стержня $l \gg d$. Пусть $l = 10 \cdot d$, тогда для частного случая кругового сечения подчеркнутый множитель превосходит тысячу. А учитывая, что, как правило, стержни превышают длиной характерный размер сечения более, чем на порядок, приходим к выводу о том, что осевая жесткость настолько больше изгибной, что обычно считается равной бесконечности. Следовательно, нормальная сила не оказывает существенного влияния на перемещения в рамах, и эпюры нормальной силы не строятся, а все внимание обращается на изгибающий момент и изгибную жесткость.

Но для заданной рамы подчеркнутый множитель согласно формуле (1) равен всего трем, поэтому нормальную силу учитывать необходимо. Именно в этом и состоит особенность данной задачи.

Теперь, поскольку конструкция безопорна и уравновешена, найдем степень внутренней статической неопределимости:

$$3 \cdot (\text{число замкнутых контуров}) - (\text{число врезанных шарниров}) = 3 \cdot 3 - 6 = 3.$$

Рама трижды статически неопределима. Пользуясь прямой симметрией рамы относительно вертикальной и горизонтальной осей, рассмотрим левую верхнюю четвертинку конструкции (Рис. 2, а). В сечениях В и С из-за прямой симметрии обращается в нуль поперечная сила. Кроме того, в сечении С обнуляется момент благодаря шарнирному закреплению тяг. В сечении D момент равен нулю из-за врезанного шарнира, а поперечная сила – из-за прямой симметрии. Далее, составив мысленно уравнение проекций на горизонталь, можно видеть, что реакция шарнира D также равна нулю. Однако отбросить его (Рис. 2, б)

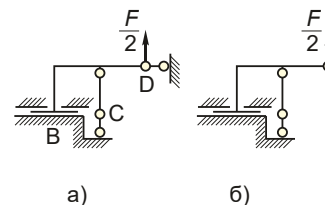


Рис. 2

нельзя, потому что конструкция получает свободу горизонтального перемещения. Если обратиться к исходной раме (Рис. 1), то становится ясно, что это перемещение не будет происходить, но в рассматриваемой конструкции Рис. 2, а шарнир D необходимо оставить.

Имеем четыре реакции: в сечении В – вертикальная сила и момент, в сечении С – вертикальная сила, в сечении D – горизонтальная сила. С учетом трех уравнений равновесия конструкция оказывается единожды статически неопределимой.

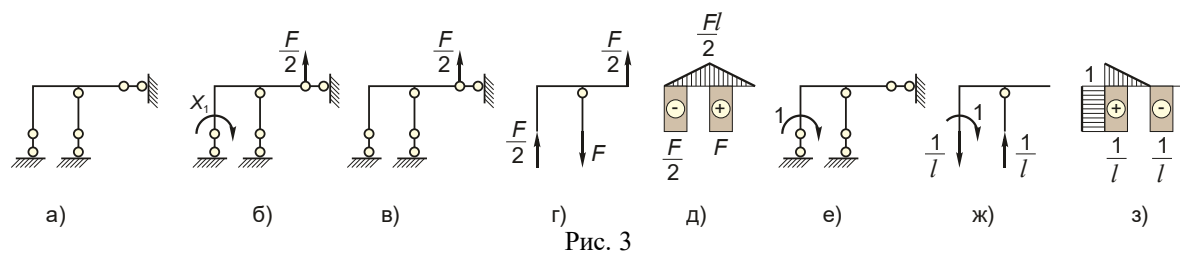


Рис. 3

Выберем основную систему Рис. 3, а. Эквивалентная система Рис. 3, б. Каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1F} = 0 \quad (2)$$

Состояние «F» – Рис. 3, в, оно же после замены связей на реакции – Рис. 3, г, эпюры Рис. 3, д. Эпюра нормальной силы в отличие от штрихованной эпюры изгибающего момента отмечается сплошной заливкой со знаком. Состояние «1» – Рис. 3, е, реакции связей Рис. 3, ж, эпюры Рис. 3, з. Вычисляем коэффициенты уравнения (2), заменяя осевую жесткость на изгибную согласно (1):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \left(2 \cdot \frac{1}{l} \cdot l \cdot \frac{1}{l} \right) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{l}{3} + l \right) = \frac{1}{EA} \cdot \frac{2}{l} + \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{4}{3} l = \frac{1}{E} \cdot \frac{l^2}{3 \cdot I_x} \cdot \frac{2}{l} + \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{4}{3} l = \frac{l}{EI_x} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) = 2 \cdot \frac{l}{EI_x}$$

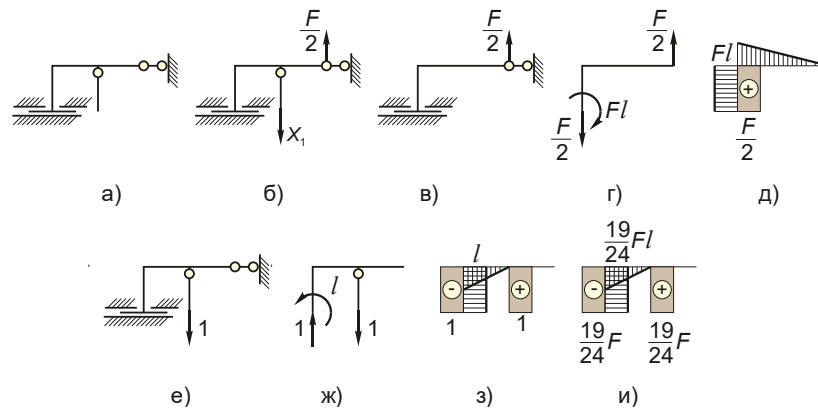
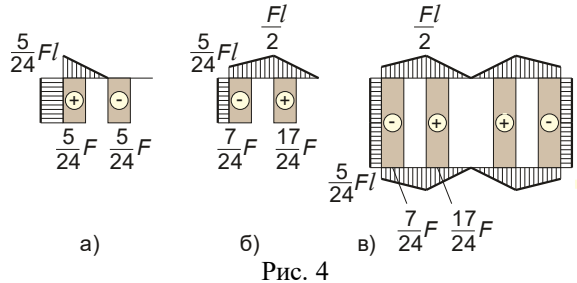
$$\delta_{1F} = \frac{1}{EA} \left(-\frac{F}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{l} - F \cdot l \cdot \frac{1}{l} \right) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{1}{EA} \cdot \frac{3}{2} F + \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{12} Fl^2 =$$

$$= -\frac{1}{E} \cdot \frac{l^2}{3 \cdot I_x} \cdot \frac{3}{2} F + \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{12} Fl^2 = \frac{Fl^2}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) = -\frac{5}{12} \cdot \frac{Fl^2}{EI_x}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{5}{12} \cdot \frac{Fl^2}{EI_x}}{\frac{2}{2} \cdot \frac{l}{EI_x}} = \frac{5}{24} Fl$$

Состояние « X_1 » – Рис. 4, а, суммарная эпюра – Рис. 4, б. Для рамы целиком суммарная эпюра имеет вид Рис. 4, в,

Для проверки выберем другую основную систему – Рис. 5, а. Эквивалентная система Рис. 5, б, состояние «F» – Рис. 5, в, реакции – Рис. 5, г, эпюры Рис. 5, д, состояние «1» – Рис. 5, е, реакции – Рис. 5, ж, эпюры Рис. 5, з.



$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} (2 \cdot l) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{4}{3} l^3 \right) = \frac{1}{E} \cdot \frac{l^2}{3 \cdot I_x} \cdot 2l + \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{4}{3} l^3 = \frac{l^3}{EI_x} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) = 2 \frac{l^3}{EI_x}$$

$$\delta_{1F} = \frac{1}{EA} \left(-\frac{F}{2} \cdot l \right) - \frac{1}{EI_x} \left[\frac{l}{6} \cdot l \cdot \left(2Fl + \frac{Fl}{2} \right) + Fl^3 \right] = -\frac{1}{EA} \cdot \frac{1}{2} Fl - \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{17}{12} Fl^3 =$$

$$= -\frac{1}{E} \cdot \frac{l^2}{3 \cdot I_x} \cdot \frac{1}{2} Fl - \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{17}{12} Fl^3 = -\frac{Fl^3}{EI_x} \left(\frac{1}{6} + \frac{17}{12} \right) = -\frac{19}{12} \cdot \frac{Fl^3}{EI_x}; \quad X_1 = \frac{19}{24} F$$

Состояние « X_1 » – Рис. 5, и. Таким образом, суммарная эпюра получилась такой же, как для первой основной системы – Рис. 4, в. Проверка сошлась.

Для самостоятельного решения можно предложить основную систему с разрешенным вертикальным перемещением в сечении В. Результаты таковы:

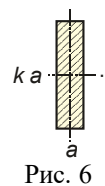
$$\delta_{11} = 2 \frac{l^3}{EI_x}; \quad |\delta_{1F}| = \frac{7}{12} \cdot \frac{Fl^3}{EI_x}$$

В завершении следует вернуться к вопросу о поперечном сечении. Каким оно должно быть, чтобы соблюдалось условие (1)? Иными словами, требуется найти сечение, обладающее максимальным осевым моментом инерции при минимальной площади.

Круг и прямоугольник удобны тем, что вокруг любой фигуры можно всегда описать один круг, а в фигуру вписать другой. Таким образом, свойства фигуры оказываются промежуточными между свойствами вписанного и описанного кругов. То же касается и прямоугольника.

Круглое сечение мы уже рассмотрели и выяснили, что оно даже приблизительно не соответствует данному условию. Теперь пусть это будет прямоугольник (Рис. 6). Изгиб происходит в плоскости наибольшей жесткости, то есть в вертикальной. Поскольку ka – характерный размер сечения (габарит), то зададим длину как $l = m \cdot ka$, где число m для соблюдения гипотезы стержня должно быть большим (не менее 10):

$$A = k \cdot a^2; \quad I_x = \frac{1}{12} a (k \cdot a)^3 = \frac{k^3}{12} a^4; \quad (1) \rightarrow k \cdot a^2 = 3 \cdot \frac{k^3}{12} a^4 \frac{1}{(m \cdot k \cdot a)^2} \rightarrow m = \frac{1}{4} \rightarrow l = \frac{1}{4} k \cdot a$$



То есть получилось, что длина участка рамы в четыре раза меньше (!) габарита сечения! Гипотеза стержня тем самым грубо нарушается.

Потерпев неудачу с простейшими сечениями, обратимся к более сложным, а точнее – к стандартным прокатным профилям. Известно, что двутавр обладает оптимальной формой с точки зрения изгибной жесткости. Выпишем из ГОСТ 8239-72 геометрические характеристики наибольшего и наименьшего двутавров:

$$\text{№10: } h \text{ (габарит)} = 100 \text{ мм, } A = 12 \text{ см}^2 = 1200 \text{ мм}^2, I_x = 198 \text{ см}^4 = 1.98 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$$

$$\text{№60: } h = 600 \text{ мм, } A = 138 \text{ см}^2 = 13800 \text{ мм}^2, I_x = 76806 \text{ см}^4 = 7.68 \cdot 10^8 \text{ мм}^4$$

$$(1) \rightarrow l = \sqrt{\frac{3 \cdot I_x}{A}}; \text{ для двутавра №10: } l = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.98 \cdot 10^6}{1200}} = 70.36 \text{ мм}; \quad \frac{l}{h} = 0.7$$

$$\text{для двутавра №60: } l = \sqrt{\frac{3 \cdot 7.68 \cdot 10^8}{13800}} = 408.6 \text{ мм}; \quad \frac{l}{h} = 0.68$$

Как и следовало ожидать, результаты получились больше, чем для прямоугольника, но все равно категорически малы.

Таким образом, подобрать сечение, которое бы соответствовало условию (1), при одновременном соблюдении гипотезы стержня, невозможно. Поставленная задача не отражает реальное соотношение размеров и является чисто учебной, при этом, правда, не менее интересной с точки зрения рассмотрения разных внутренних силовых факторов и их учета в методе сил.

В реальной раме заданной конфигурации оказывается, что боковые участки рамы почти не деформируются, и задача сводится к рассмотрению консоли длиной l , нагруженной силой $\frac{F}{2}$ на

конце. Четыре равноопасных сечения расположены непосредственно над и под тягами, $M_{\max} = \frac{Fl}{2}$.

Литература

Г. П. Клюева, Е. В. Сосновский, Методические указания к решению задач всесоюзной олимпиады по сопротивлению материалов, Изд. МВТУ, 1992