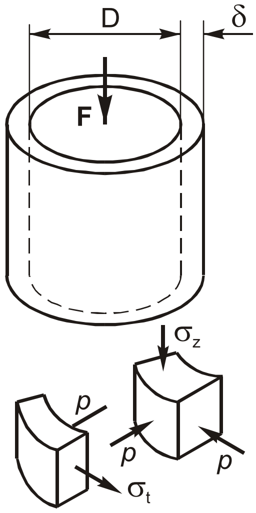
Расчет на прочность цилиндра с втулкой



Цилиндр диаметром D охвачен втулкой толщиной δ и нагружен силой F. Найти коэффициент запаса конструкции. Исходные данные:
$D = 40$ мм, $\mu = 0.2$, $\delta = 1$ мм, $F = 250$ кН.
Свойства материалов: цилиндр – сталь, $\sigma_{TC} = 400$ МПа, $E_C = 2{\cdot}10^5$ МПа; втулка – медь, $\sigma_{TM} = 120$ МПа, $E_M = 10^5$ МПа.
В обоих телах все сечения равноопасны, все точки равноопасны, все оси – главные. Вырежем из обоих тел два примыкающих друг к другу элементарных объема (см. рис.).
Вначале рассмотрим поперечное сечение цилиндра.
Плоская задача о теле, находящемся под действием равномерной внешней нагрузки, является одной из стандартных задач общей теории напряженного состояния (НС). Причем ни форма тела, ни направление нагрузки (к контуру тела – давление – или от контура) роли не играют. Решить задачу проще всего с помощью теоремы о равнодействующей равномерной нагрузки. Но еще проще представить любое тело близ поверхности Земли, на которое действует атмосферное давление, или тело, полностью погруженное в жидкость. Очевидно, что в обоих случаях давление жидкости (газа) действует в теле одинаково во всех направлениях.
То есть получается, что и в поперечном сечении цилиндра по любым направлениям (в том числе радиальному и окружному) действует давление p, величина которого пока неизвестна. Но тогда, по третьему закону Ньютона, получается, что к внутренней поверхности элемента втулки приложено то же самое давление.
Таким образом, элементарный объем втулки оказывается полностью подобен элементу оболочки, рассматриваемому в задаче Лапласа. И хотя в последней речь идет о жидкости или газе, выясняется, что расчетная схема для давления со стороны твердого тела оказывается идентичной. Значит, справедлива и формула для окружного напряжения:

$$\sigma_t = p\frac{D}{2\delta} \tag{1}$$

Переходя к трехмерному случаю, запишем сначала осевое сжимающее напряжение

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi D^2}$$

Окружная деформация в любой точке поперечного сечения цилиндра, в том числе на поверхности, согласно обобщенному закону Гука равна

$$\varepsilon_{tC} = \frac{1}{E_C}\left[-p-\mu\left(-p-\sigma_z\right)\right] = -\frac{1}{E_C}\left[p-\mu\left(p+\sigma_z\right)\right] \tag{2}$$

Здесь очень важно соблюсти правило знаков. Деформация предполагается положительной, тогда первый, третий и четвертый минусы в первой формуле (выделены красным) обусловлены тем, что все напряжения – сжимающие. Второй минус есть часть обобщенного закона Гука и поэтому его лучше никогда не менять.
Результат кажется парадоксальным – при очевидном растяжении, то есть положительной деформации границы цилиндра и втулки, в формуле образовался знак минус. К этому «парадоксу» мы вернемся позже. Напоследок важно напомнить, что все напряжения в формулу (2) должны подставляться по модулю – направления уже учтены.
Из исходных данных видно, что $\delta \ll D$, то есть втулка сводится к расчетной схеме тонкостенной трубы. Тогда закруглением ее элемента можно пренебречь и считать, что элемент работает на одноосное растяжение с напряжением σ_t, и поэтому его осевая деформация

$$\varepsilon_{tM} = \frac{\sigma_t}{E_M} \tag{3}$$

Здесь все величины положительны.
Условие совместности деформаций формулируется так, что граница двух тел принадлежит им обоим, и тогда их деформации на границе равны. По-прежнему считая величину ε_{tC} формально положительной, записываем уравнение совместности деформаций:

$$\varepsilon_{tC} = \varepsilon_{tM}$$

откуда, с учетом формул (1)…(3), после преобразований следует

$$p = \frac{\mu}{1-\mu+\dfrac{D}{2\delta}\dfrac{E_C}{E_M}}\sigma_z \tag{4}$$

Используя критерий Хубера-Мизеса и подставив исходные данные, получаем: $\sigma_z \approx 200$ МПа (сжатие), $\sigma_t = 19.5$ МПа (растяжение), $p = 0.975$ МПа (сжатие). Теперь, даже не подсчитывая модуль деформации по формуле (2), можно увидеть, что осевое напряжение, по модулю существенно большее всех прочих, входит со знаком плюс, обеспечивая положительную величину окружной деформации. Это – пусть косвенная и ненадежная, но все же проверка.

Определяя эквивалентное напряжение для обоих тел, можно принять для цилиндра $\sigma_z >> p \to \sigma_{экв} \approx \sigma_z = 200$ МПа. Относительно точного расчета погрешность составляет около 1%. Аналогично для втулки: $\sigma_t >> p \to \sigma_{экв} \approx \sigma_t = 20$ МПа (погрешность 0.05%, по критерию Треска-Сен-Венана 2.3%). Коэффициенты запаса равны 2 и 6 соответственно. Окончательно: наиболее нагруженное тело – цилиндр, коэффициент запаса конструкции равен 2. Все сечения равноопасны, все точки равноопасны.

Изменим постановку задачи, предположив, что втулка имеет большую, вплоть до бесконечной, толщину стенки. Тогда из (4) следует

$$p' = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z$$

Впрочем, ту же формулу можно получить из обобщенного закона Гука (2), полагая $\varepsilon_t = \varepsilon_r = 0$. Так или иначе, подставляя исходные данные, получаем $p' = 50$ МПа, то есть контактное давление выросло примерно в 50 раз! Казалось бы, при увеличении нагрузки прочность должна упасть, но все происходит прямо противоположным образом – прочность выросла, пусть и всего примерно на треть. Еще один «парадокс» находит столь же логичное объяснение: чем больше сжимающие напряжения, тем ближе НС к равноосному сжатию, которое, как известно, обеспечивает бесконечно большой коэффициент запаса.