

## Колонны с зазорами

Рассмотрим в общей постановке следующую задачу – Рис. 1, а. Точки приложения сил указаны черными кружочками. Через I обозначена абсолютно жесткая плита, через II – абсолютно жесткие упоры. Зазоры  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  умышленно показаны увеличенными. Прежде чем ставить задачу и задавать конкретные значения величин длин, площадей поперечных сечений, зазоров и сил, необходимо проанализировать задачу в общей постановке.

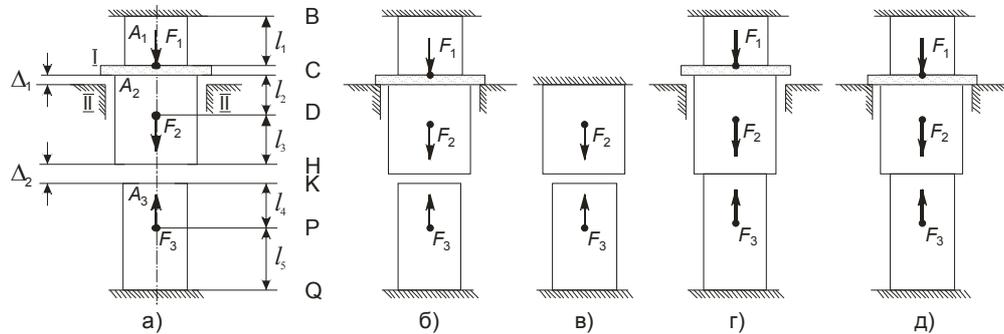


Рис. 1

Данная колонна относится к так называемым «колоннам с зазором» (в данном случае – зазорами). Особенностью таких задач является то, что степень их статической неопределенности зависит от перемещений отдельных сечений.

Изначально колонна статически определима. В самом деле, отбрасывая заделки В и Q и заменяя их реакциями, можно составить два уравнения равновесия в проекциях на вертикаль. Из суммы сил (двух известных активных и одной неизвестной реактивной) участка ВН определяется реакция в заделке В, а условие равновесия участка KQ дает реакцию в заделке Q. Зная реакции, построить эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $w$  можно без труда.

Однако возможно, что в результате действия сил и удлинений участков колонны один или два зазора будут перекрыты. Причем важны не только факты перекрытий, но и последовательность, в которой они происходят.

Пока ни один зазор не перекрыт, перемещение сечения С, способное перекрыть первый (верхний) зазор, определяется следующим выражением:

$$w_1 = \frac{F_1 l_1}{EA_1} + \frac{F_2 l_1}{EA_1} = \frac{(F_1 + F_2) l_1}{EA_1},$$

то есть сила  $F_3$  на это перекрытие не влияет. Напротив, на перекрытие второго (нижнего) зазора работают все три внешние силы:

$$w_2 = \frac{F_1 l_1}{EA_1} + \frac{F_2 l_2}{EA_2} + \frac{F_3 l_5}{EA_3}$$

Обратим внимание на знак последнего слагаемого. Сила  $F_3$ , направленная вверх, приводит к удлинению участка PQ и, следовательно, работает на перекрытие второго зазора, подобно силам  $F_1$  и  $F_2$ , так что все три силы войдут в уравнение с положительными знаками. Отметим также, что вплоть до перекрытия второго зазора (если оно произойдет) участки ДН и КР перемещаются как жесткие, то есть без деформаций.

Случай, когда оба зазора перекрываются одновременно, не представляет практического интереса, поскольку два независимых действительных числа (расстояние между двумя сечениями и перемещение третьего сечения) никогда не будут в точности равны друг другу.

В произвольный момент до перекрытия любого из зазоров расстояние от плиты I до упоров II равно  $\Delta_1 - w_1$ . В тот же момент расстояние между сечениями Н и К равно  $\Delta_2 - w_2$ . Как только одно из этих выражений обратится в нуль, соответствующий зазор перекрывается. То есть, если  $\Delta_1 - w_1 < \Delta_2 - w_2$ , то сначала, возможно, перекрывается первый зазор, затем, возможно, второй. События поменяют последовательность, если изменится знак соотношения между правой и левой частями.

Слова «возможно» означают, что соответствующий зазор может и не перекрыться. Условие, сформулированное выше, позволяет установить лишь последовательность перекрытия зазоров, а не сами факты перекрытий. Остается определиться и с этими условиями.

Допустим, что сначала перекрывается первый зазор (Рис. 1, б). Произойдет это, если  $w_1$  превысит  $\Delta_1$ . После этого удлинений участка ВС далее не происходит, сечение С неподвижно, сила  $F_1$  на дальнейшее деформирование не влияет, и колонна укорачивается на один участок (Рис. 1, в), причем зазор равен уже  $\Delta_2 - \Delta_1$ . Он будет перекрыт, если сумма величин упругих удлинений участков CD и PQ, то есть

$$w_3 = w_2 - w_1 = \frac{F_2 l_2}{EA_2} + \frac{F_3 l_5}{EA_3}$$

будет больше, чем  $\Delta_2 - \Delta_1$ .

В этом случае следует выполнить еще одну проверку, специфичную только для таких задач. После перекрытия второго зазора сила  $F_3$  начинает работать на раскрытие первого зазора. В самом деле, мысленно обратим в нуль силы  $F_1$  и  $F_2$  на Рис. 1, г – первый зазор неминуемо раскроется. То же самое случится, если обе эти силы отличны от нуля, но «слабы» по сравнению с  $F_3$ .

Теперь допустим, что  $\Delta_1 - w_1 > \Delta_2 - w_2$ . Тогда сначала, возможно, перекроется второй зазор, затем, возможно, первый. Второй зазор перекроется, если  $w_2 > \Delta_2$ . Получим расчетную схему Рис. 1, г. Эта задача уже статически неопределима, и вопрос о том, перекроется ли первый зазор, следует решать отдельно. Если в той или иной последовательности перекрываются оба зазора, задача является дважды статически неопределимой.

Итак, обобщим:

1. если  $\Delta_1 - w_1 < \Delta_2 - w_2$ ,  $w_1 > \Delta_1$  и  $w_3 > \Delta_2 - \Delta_1$ , то сначала перекрывается первый зазор, потом второй;
2. если  $\Delta_1 - w_1 < \Delta_2 - w_2$ ,  $w_1 > \Delta_1$  и  $w_3 < \Delta_2 - \Delta_1$ , то перекрывается только первый зазор;
3. если  $\Delta_1 - w_1 > \Delta_2 - w_2$ ,  $w_2 > \Delta_2$ , то сначала перекрывается второй зазор. Вопрос о перекрытии первого зазора рассматривается дополнительно;
4. если  $\Delta_1 - w_1 < \Delta_2 - w_2$ ,  $w_1 < \Delta_1$ , или если  $\Delta_1 - w_1 > \Delta_2 - w_2$ ,  $w_2 < \Delta_2$ , то не перекрывается ни один зазор.

Зададимся следующими исходными данными:

$$l_1 = l_3 = l_4 = l; \quad l_2 = l_5 = 2l; \quad A_1 = A_3 = A; \quad A_2 = 2A;$$

$$F_1 = F_3 = F; \quad F_2 = 2F; \quad \Delta_1 = 4 \frac{Fl}{EA}; \quad \Delta_2 = 3 \frac{Fl}{EA}$$

Расчетная схема показана на Рис. 2, а. Выясним последовательность перекрытия зазоров:

$$w_1 = \frac{(F + 2F)l}{EA} = 3 \frac{Fl}{EA}; \quad w_2 = \left(1 + \frac{2 \cdot 1}{1} + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 2}{1}\right) \frac{Fl}{EA} = 7 \frac{Fl}{EA}; \quad w_3 = w_2 - w_1 = 4 \frac{Fl}{EA}$$

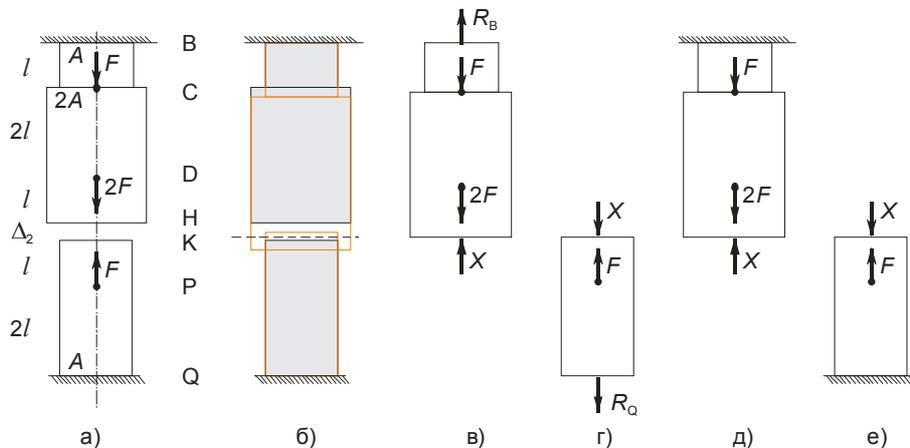


Рис. 2

Видно, что реализован случай 3, и расчетная схема после перекрытия второго показана на Рис. 1, г. Сначала решим задачу в предположении, что первый зазор вообще не перекрывается. Если выяснится, что перемещение сечения С превышает  $\Delta_1$ , то решение нужно будет переделать, разбив на два этапа: от момента перекрытия второго зазора до перекрытия первого, и после перекрытия первого. Всего же этапов будет три, и к двум упомянутым на ранней стадии прибавится процесс перекрытия второго зазора.

Пока же считаем, что наличие упоров II на результат не влияет, так что расчетная схема упрощается (Рис. 2, а).

После перекрытия зазора в сечениях Н и К, которые слились воедино, возникает реактивная (контактная) сила, которую мы обозначим через  $X$ . Направление этой силы, в отличие от реакций заделки, известно точно – сжимающее. Если в результате решения сила  $X$  приобретет знак «минус», это будет говорить об ошибке.

Можно, впрочем, поступать и противоположным образом: привычно присвоить силе  $X$  знак «плюс», то есть направить от торца. Тогда об ошибке будет свидетельствовать положительное значение полученной силы.

Если бы две части конструкции, начальное положение которых на Рис. 2, б показано сплошным серым цветом, деформировались независимо, они получили бы вид, показанный красными линиями. Но, «встретившись» на пунктирной линии, они остановились.

Отбросим обе заделки, заменим их неизвестными (на этот раз и по направлению, и по величине) реакциями, и запишем уравнения равновесия в проекциях на вертикаль (Рис. 2, в и Рис. 2, г):

$$\begin{aligned} R_B - F - 2F + X &= 0 & (\text{участок ВН}); \\ -X + F - R_Q &= 0 & (\text{участок КQ}) \end{aligned} \quad (1)$$

Имеем два уравнения равновесия с тремя неизвестными ( $R_B$ ,  $R_Q$ ,  $X$ ). Колонна единожды статически неопределима.

Для составления дополнительного уравнения сформулируем условие совместности перемещений – «Второй зазор перекрыт». Теперь необходимо по этому условию записать в математической форме уравнение совместности перемещений.

Перемещение сечений Н и К (без учета силы  $X$ ) в неявной форме уже были найдены (их сумма равна  $w_2$ ), но удобно будет сделать это еще раз, теперь с учетом  $X$ . Итак, согласно принципу суперпозиции, перемещение сечения Н, или, иначе говоря, «вклад» участка ВН (Рис. 2, д) в перекрытие зазора, составит

$$w_H = \frac{Fl}{EA} + \frac{2F \cdot l}{EA} + \frac{2F \cdot 2l}{2E \cdot A} - \frac{Xl}{EA} - \frac{X \cdot 3l}{2E \cdot A} = \frac{l}{EA} \left( F + 2F + 2F - X - \frac{3}{2}X \right) = \frac{l}{EA} \left( 5F - \frac{5}{2}X \right) \quad (2)$$

Любые растягивающие силы способствуют перекрытию зазора и должны входить в уравнение со знаком «плюс», а силы, вызывающие сжатие (в нашем случае это только  $X$ ), с минусом.

Аналогично, для участка КQ (Рис. 2, е) имеем:

$$w_K = \frac{F \cdot 2l}{EA} - \frac{X \cdot 3l}{EA} = \frac{l}{EA} (2F - 3X) \quad (3)$$

Раз зазор перекрыт, то сумма этих перемещений в точности равна величине зазора:

$$w_H + w_K = \Delta_2 \quad (4)$$

Это и есть искомое уравнение совместности перемещений.

После подстановки формул (2) и (3) в уравнение (4) и упрощений получаем

$$X = \frac{8}{11} F$$

Сила получилась положительной, чего и следовало ожидать. Теперь из уравнений (1) находим:

$$R_B = F + 2F - X = F \left( 3 - \frac{8}{11} \right) = \frac{25}{11} F;$$

$$R_Q = -X + F = \left( -\frac{8}{11} + 1 \right) F = \frac{3}{11} F$$

Теперь нетрудно методом сечений определить усилия на участках колонны:

$$N_{BC} = R_B = \frac{25}{11} F; \quad N_{CD} = N_{BC} - F = \frac{25}{11} F - F = \frac{14}{11} F;$$

$$N_{DH} = N_{CD} - 2F = \frac{14}{11} F - 2F = -\frac{8}{11} F; \quad N_{PQ} = N_{CD} + F = \frac{3}{11} F$$

Попутно отметим, что сошлись еще две проверки:

$$N_{DH} = N_{KP} = -\frac{8}{11} F = X; \quad R_Q = N_{PQ} = \frac{3}{11} F$$

Удлинения участков равны:

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l}{EA} = \frac{25 Fl}{11 EA}; \quad \Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot 2l}{2EA} = \frac{14 Fl}{11 EA}; \quad \Delta l_{DH} = \frac{N_{DH} l}{2EA} = -\frac{4 Fl}{11 EA};$$

$$\Delta l_{KP} = \frac{N_{KP} l}{EA} = -\frac{8 Fl}{11 EA}; \quad \Delta l_{PQ} = \frac{N_{PQ} \cdot 2l}{EA} = \frac{6 Fl}{11 EA}$$

Перемещение сечения есть сумма удлинений участков между ним и заделкой:

$$w_C = \Delta l_{BC} = \frac{25 Fl}{11 EA}; \quad w_D = \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \frac{25 Fl}{11 EA} + \frac{14 Fl}{11 EA} = \frac{39 Fl}{11 EA};$$

$$w_H = \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{DH} = w_D + \Delta l_{DH} = \frac{39 Fl}{11 EA} - \frac{4 Fl}{11 EA} = \frac{35 Fl}{11 EA};$$

$$w_P = \Delta l_{PQ} = \frac{6 Fl}{11 EA}; \quad w_K = \Delta l_{PQ} + \Delta l_{KP} = \frac{6 Fl}{11 EA} - \frac{8 Fl}{11 EA} = -\frac{2 Fl}{11 EA}$$

Перемещение сечения С равно  $w_C = \Delta l_{BC} = \frac{25 Fl}{11 EA} < 4 \frac{Fl}{EA} = \Delta_1$ , то есть плита I «не дотягивает» до упоров II. Значит, первый зазор вообще не перекроется. Поэтому вместо трех этапов решения задачи имеем всего один, и он почти закончен. Осталось по результатам расчетов построить эпюры (Рис. 3).

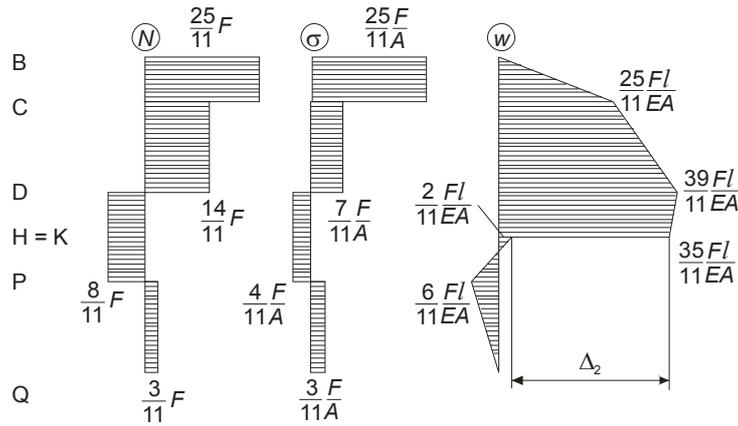


Рис. 3

Из эпюры  $\sigma$  можно сделать вывод о том, что сечения участка ВС равноопасны,  $\sigma_{\max} = \frac{25 F}{11 A}$ .

Эпюру  $w$  рекомендуется строить следующим образом: для каждого из участков от заделки к бывшему зазору, то есть в последовательности: В-С-Д-Н и Q-Р-К. На эпюре образуется скачок, величина которого, разумеется, должна быть равна зазору:

$$w_H - w_K = \frac{35 Fl}{11 EA} - \frac{2 Fl}{11 EA} = \frac{33 Fl}{11 EA} = 3 \frac{Fl}{EA} = \Delta_2$$

Проверка сошлась.

Отметим еще одну особенность построения эпюры  $w$ : положительные значения удлинений участков соответствуют перемещению сечения от соответствующей заделки, отрицательные – к заделке.

Для еще одной проверки следует мысленно повернуть и саму колонну, и все эпюры на  $90^\circ$  против часовой стрелки. Тогда положительным (отложенным вверх) значениям усилия будут соответствовать возрастающие участки перемещения.

Изменим исходные данные:

$$l_2 = l_3 = l_5 = l; \quad l_1 = l_4 = 2l; \quad A_2 = A; \quad A_1 = A_3 = 2A;$$

$$F_1 = F_3 = 2F; \quad F_2 = F; \quad \Delta_1 = \frac{Fl}{EA}; \quad \Delta_2 = 4 \frac{Fl}{EA}$$

Расчетная схема имеет вид Рис. 4, а. Перемещения будут равны:

$$w_1 = \frac{(2F + F) \cdot 2l}{E \cdot 2A} = 3 \frac{Fl}{EA}; \quad w_2 = \frac{2F \cdot 2l}{2EA} + \frac{F \cdot 2l}{2EA} + \frac{F \cdot l}{EA} + \frac{2F \cdot l}{2EA} = 5 \frac{Fl}{EA}; \quad w_3 = (5 - 3) \frac{Fl}{EA} = 2 \frac{Fl}{EA}$$

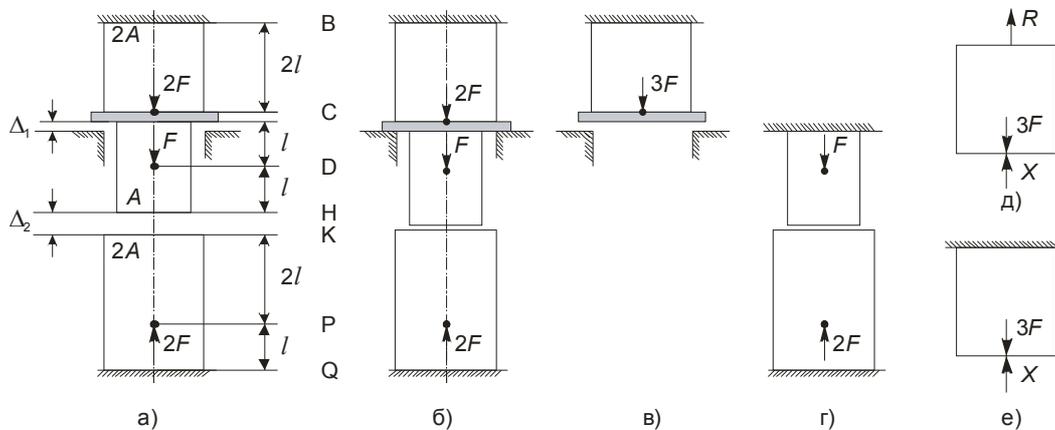


Рис. 4

Результаты соответствуют случаю 2. После перекрытия первого зазора расчетная схема приобретет вид Рис. 4, б. Это значит, что задача распалась на три независимых: колонна ВС, нагруженная силой

$F_1 + F_2 = 2F + F = 3F$  (поскольку сила  $F_2$  также содействует перекрытию зазора), показанная на Рис. 4, в, и две колонны СН и КQ (Рис. 4, г).

Решим первую задачу. Заменяя реакцию упоров на силу  $X$ , отбрасываем заделку и, заменяя ее на реакцию  $R$  (Рис. 4, д), составляем уравнение равновесия:

$$R - 3F + X = 0 \quad (5)$$

В одно уравнение вошли 2 неизвестных, значит, задача 1 раз статически неопределима. Как и раньше, условие совместности перемещений состоит в факте перекрытия первого зазора. Тогда, воспользовавшись принципом суперпозиции согласно расчетной схеме Рис. 4, е, имеем уравнение совместности перемещений:

$$\frac{(3F - X) \cdot 2l}{E \cdot 2A} = \Delta_1$$

откуда после преобразований получаем  $X = 2F$ . Тогда из уравнения (5) следует:

$$R = -X + 3F = F$$

Усилие в любом сечении колонны ВС, разумеется, также равно  $F$ .

Вторая задача состоит в анализе двух колонн, каждая из которых, как предполагается, статически определима. В самом деле, к моменту перекрытия первого зазора второй составит  $\Delta_2 - \Delta_1$ . Участки ДН и КР пока перемещаются как жесткие, следовательно, перемещения, способствующие перекрытию зазора, равны

$$w_H = w_D = \frac{Fl}{EA}; \quad w_K = w_P = \frac{2Fl}{E \cdot 2A} = \frac{Fl}{EA}$$

Если их сумма больше, чем  $\Delta_2 - \Delta_1$ , то второй зазор также перекрывается:

$$w_H + w_K = \frac{Fl}{EA} + \frac{Fl}{EA} = 2 \frac{Fl}{EA}; \quad \Delta_2 - \Delta_1 = (4 - 1) \frac{Fl}{EA} = 3 \frac{Fl}{EA}$$

То есть зазор не перекрывается, и оставшиеся задачи статически определимы. Эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $w$  строятся очевидным образом (Рис. 5).

Сечения участков CD и PQ равноопасны,  $\sigma_{\max} = \frac{F}{A}$ .

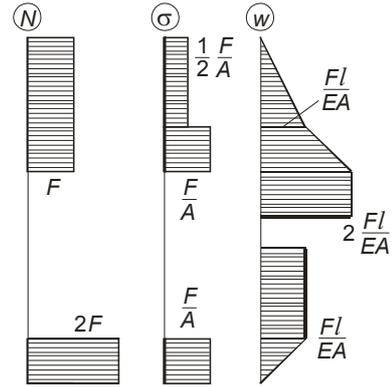


Рис. 5