К вопросу о «силе» граничных условий в задачах устойчивости

Формула энергетического метода определения критической силы имеет вид

$$F_{кр} = EI_{\min} \frac{\int v''^2\, dz}{\int v'^2\, dz} \qquad (1)$$

(жесткость здесь и далее предполагается постоянной). Функцию $v(z)$ удобно задавать в виде многочлена, поскольку именно такая функция легко возводится в степень, интегрируется и дифференцируется. Выбор порядка многочлена определяется, прежде всего, количеством граничных условий (ГУ), причем для числа ГУ, равного n, применяется многочлен n-ой степени, содержащий $(n + 1)$ константу. Все они, кроме одной, могут быть выражены через последнюю, которая, будучи вынесенной из-под интегралов в числителе и знаменателе формулы (1), сокращается.

Во всех расчетных схемах домашнего задания «Устойчивость» минимальное число ГУ равно четырем. Таким образом, многочлен имеет вид

$$v(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 \qquad (2)$$

Как правило, коэффициенты a_i ($i = 0\ldots3$) выражаются через коэффициент при старшей степени a_4, поскольку он никогда не обнуляется.

Однако для некоторых расчетных схем стоек число ГУ может достигать пяти. В таких случаях, чтобы трудоемкость всех решений была примерно одинаковой, рекомендуется все равно выбирать четыре ГУ, руководствуясь простым правилом: оставшимся, неиспользуемым ГУ, должно стать то, которое имеет наименьшую «силу». Под «силой» ГУ имеется в виду степень влияния ГУ на результат. Чем ниже порядок производной функции $v(z)$ – тем выше «сила» ГУ.

Рассмотрим одну из таких расчетных схем (Рис. 1). Все возможные ГУ имеют вид

$$v(0) = 0 \qquad (3)$$

$$v''(0) = 0 \qquad (4)$$

$$v(kl) = 0 \qquad (5)$$

$$v''(l) = 0 \qquad (6)$$

$$v'''(l) = 0 \qquad (7)$$

Нетрудно видеть, что наибольшую «силу» имеют ГУ (3) и (5), ГУ (4) и (6) существенно «слабее», и, наконец, ГУ (7) – «слабейшее» из всех. Поэтому в первом решении оно будет проигнорировано. По сути дела, это противоречит постановке задачи: раз поперечная сила на верхнем конце стойки не является нулевой, значит, на этот конец наложена связь, запрещающая горизонтальное перемещение, что, очевидно, не соответствует действительности.

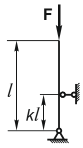

Рис. 1

Используя ГУ (3)-(6), получаем следующее решение:

$$a_0 = a_2 = 0; \qquad a_1 = k^2(2-k)l^3 a_4; \qquad a_3 = -2la_4$$

$$F_{кр} = \frac{EI_{\min}}{l^2} \frac{\frac{24}{5}}{k^4(2-k)^2 - 2k^2(2-k) + \frac{52}{35}}$$

Положив для определенности $k = \frac{1}{3}$ и приравнивая полученную величину критической силе по формуле Эйлера, получаем $\mu_1 = 1.537$.

В качестве второго («точного») решения будем использовать все ГУ (3)-(7). Соответственно, вместо многочлена четвертой степени (2) имеем

$$v(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5$$

Решение оказывается существенно более громоздким, чем первое. Достаточно сказать, что подынтегральное выражение в числителе формулы (1) включает 19 слагаемых. Поэтому приводим только коэффициенты многочлена и окончательный итог:

$$a_0 = a_2 = 0; \qquad a_1 = -k^2\left(\frac{10}{3} - \frac{10}{3}k + k^2\right)l^4 a_5; \qquad a_3 = \frac{10}{3}l^2 a_5; \qquad a_4 = -\frac{10}{3}la_5$$

Для частного случая $k = \frac{1}{3}$ находим $\mu_2 = 1.525$. Погрешность коэффициента μ_1 относительно более точного μ_2 составляет всего 0.8%.

Теперь рассмотрим случай, когда вместо ГУ (6) используется более «слабое» ГУ (7). Фактически это означает, что на верхнем конце стойки поперечная сила равна нулю, а момент – нет, то есть, казалось бы, вместо расчетной схемы Рис. 1 мы получаем Рис. 2, однако даже это не так: в ней введен запрет на угол поворота касательной, а такое ГУ «сильнее», чем ГУ на момент и тем более на силу.

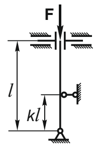

Рис. 2

Решение третьей задачи таково:

$$v(z) = a_4\left[k^2(4-k)l^3 z - 4l \cdot z^3 + z^4\right]$$

$$F_{кр} = \frac{EI_{\min}}{l^2}\frac{\frac{384}{5}}{k^4(k-4)^2 + 6k^2(k-4) + \frac{528}{35}}$$

что при $k = \frac{1}{3}$ приводит к $\mu_3 = 1.283$, а погрешность коэффициента μ_3 достигает 16.6%.

На Рис. 3 показаны упругие кривые, соответствующие полученным трем решениям – «традиционному», «точному» и «грубому» – красная, синяя и зеленая соответственно. Часть графика в диапазоне координат $0 \ldots k \cdot l$ изображена на Рис. 4. Видно, что здесь отличие третьего решения от более точных не слишком велико, чего никак нельзя сказать про диапазон $k \cdot l \ldots l$.

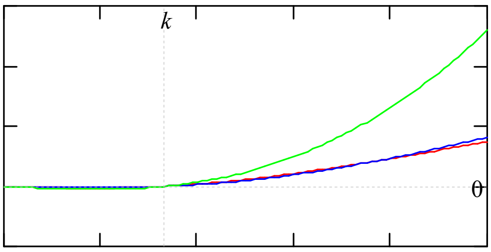

Рис. 3

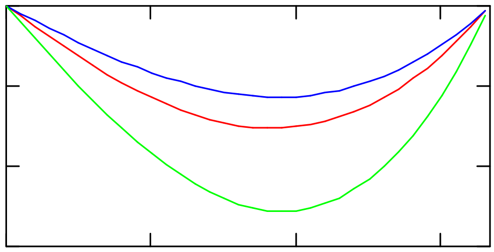

Рис. 4

Если в исходной задаче устремить параметр k к нулю, то расчетная схема стойки будет приближаться к Рис. 5, а коэффициент приведения длины – к двум. Если же $k \to 1$, то стойка стремится к стойке Эйлера с коэффициентом μ, равным единице.

Рис. 5

Сказанное поясняет Рис. 6. Погрешность третьего решения максимальна при малых величинах k и снижается до приемлемых значений при больших.

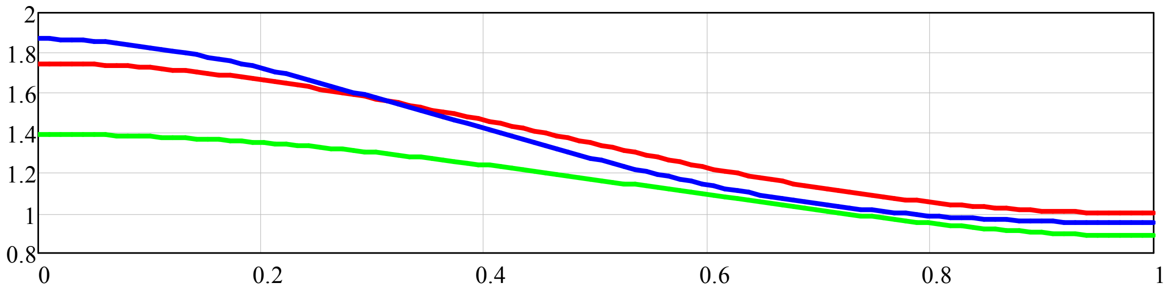

Рис. 6

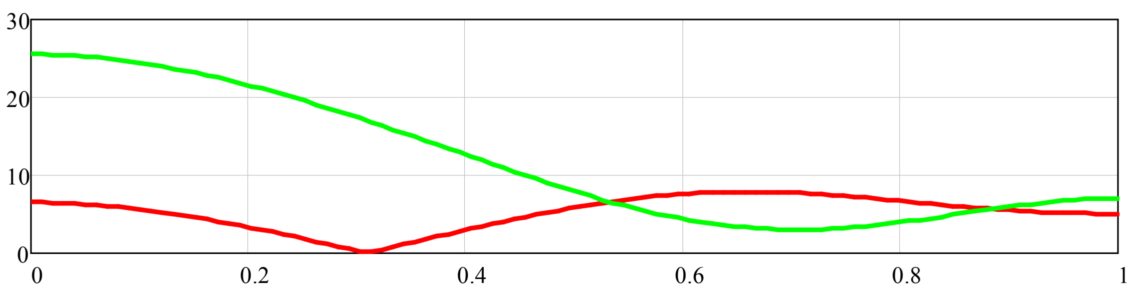

Рис. 7

Погрешности (в процентах) первого и третьего решений относительно второго в зависимости от k показаны на Рис. 7.

Подводя итоги, можно сделать вывод о том, что если необходимое число ГУ, отобранных по признаку наибольшей «силы», достигнуто, то нет никакого смысла добавлять более «слабые» ГУ: резко возрастающая трудоемкость решения не окупается ничтожным выигрышем в точности. Кроме того, замена «сильного» ГУ на более «слабое» приводит к большим погрешностям.