Ферма с горизонтальным абсолютно жестким телом

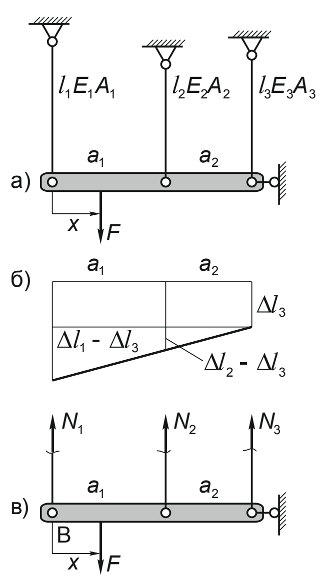

Рис. 1

Рассматривается ферма с абсолютно жестким телом (АЖТ), подвешенным на трех тягах и нагруженном силой (Рис. 1, *а*). Координата силы отсчитывается от левого конца АЖТ и обозначена *x*. Необходимо аналитически вывести, во-первых, зависимости усилий в тягах от *x*, а во-вторых, формулу такого значения *x*, при котором АЖТ строго горизонтально.

Задача будет решена в общем виде и проверена на нескольких частных случаях.

Прежде всего введем величину

$$c_i = \frac{l_i}{E_i A_i};\ (i = 1, 2, 3)$$

Физический смысл константы *c* – коэффициент пропорциональности между усилием в стержне и его удлинением.

Условие совместности перемещений: линия, соединяющая концы тяг, остается прямой. Условие одно, значит, задача единожды статически неопределима. Выберем кинематическую схему с удлинением всех трех тяг (Рис. 1, *б*) и, исходя из подобия треугольников, запишем уравнение совместности перемещений

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{a_1 + a_2} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_3}{a_2},$$

откуда, после раскрытия пропорции и приведения подобных, получаем

$$N_1 c_1 a_2 - N_2 c_2 \left(a_1 + a_2\right) + N_3 c_3 a_1 = 0 \qquad (1)$$

Схема сил показана на Рис. 1, *в*. Для нее составляем два уравнения: сумму сил на вертикаль

$$N_1 + N_2 + N_3 = F, \qquad (2)$$

и сумму моментов относительно точки B

$$N_2 a_1 + N_3 \left(a_1 + a_2\right) = F \cdot x \qquad (3)$$

Решая уравнения (1)-(3) относительно *x*, получаем:

$$N_3 = F \frac{x\left[c_2\left(a_1 + a_2\right) + c_1 a_2\right] - c_1 a_1 a_2}{a_1\left(c_3 a_1 - c_1 a_1 a_2\right) + \left(a_1 + a_2\right)\left[c_2\left(a_1 + a_2\right) + c_1 a_2\right]}$$

$$N_2 = \frac{F \cdot x - N_3\left(a_1 + a_2\right)}{a_1} \qquad (4)$$

$$N_1 = F - N_3 - N_2$$

Ответ на первый вопрос получен. Можно далее вывести для каждого усилия условие равенства нулю. Например, третье обращается в нуль, если

$$x = \frac{c_1 a_1 a_2}{c_2\left(a_1 + a_2\right) + c_1 a_2} \qquad (5)$$

Ответ на вопрос относительно горизонтальности АЖТ гораздо более трудоемок. Очевидно, что при $x = 0$ первая и вторая тяги растянуты, третья сжата, и АЖТ повернуто против часовой стрелки. Если $x = a_1 + a_2$, то первая тяга сжата, остальные растянуты, и АЖТ повернуто по часовой стрелке. Значит, при некотором промежуточном значении координаты *x* (причем единственном) АЖТ будет горизонтально. Математически это условие записывается так:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3,$$

хотя можно ограничиться одним равенством, а второе выполнится тождественно. Следует домножить на c_i силы, получив удлинения, приравнять их и решить уравнение относительно *x*. Весьма громоздкие преобразования в итоге приводят к довольно простому выражению:

$$x = \frac{c_1\left[c_2\left(a_1 + a_2\right) + c_3 a_1\right]}{c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3} \qquad (6)$$

Формулу (6) легко проверить по предельному переходу. Например, для симметричной фермы ($c_1 = c_3$, $a_1 = a_2$) получаем вполне ожидаемый и не зависящий от c_2 результат $x = a_1$. Или если предположить, что вторая тяга представляет из себя абсолютно жесткое тело ($c_2 = 0$), то по формуле (6) получаем тот же результат $x = a_1$.

Рассмотрим частный случай: $a_1 = a_2 = 2$, $c_1 = 2$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 1$ (в условных безразмерных единицах). По формулам (4) строим графики усилий в зависимости от *x* – Рис. 2. Можно посчитать по формуле (5), что третье усилие меняет знак при $x = \frac{8}{3}$.

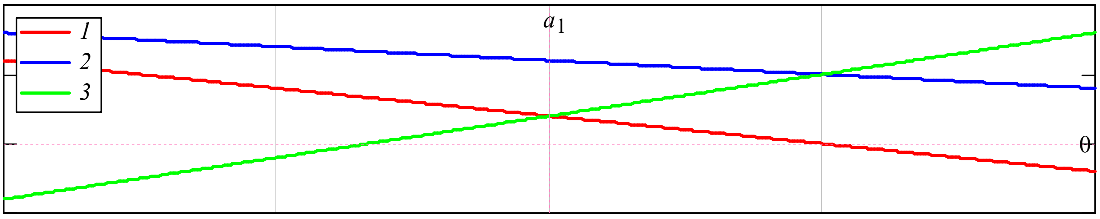

Рис. 2

Наконец, строим зависимости удлинений от координаты x – Рис. 3. Как и следовало ожидать, все три графика пересекаются в одной-единственной точке, абсцисса которой ищется по формуле (6) и равна $\frac{16}{7} = 2.286$.

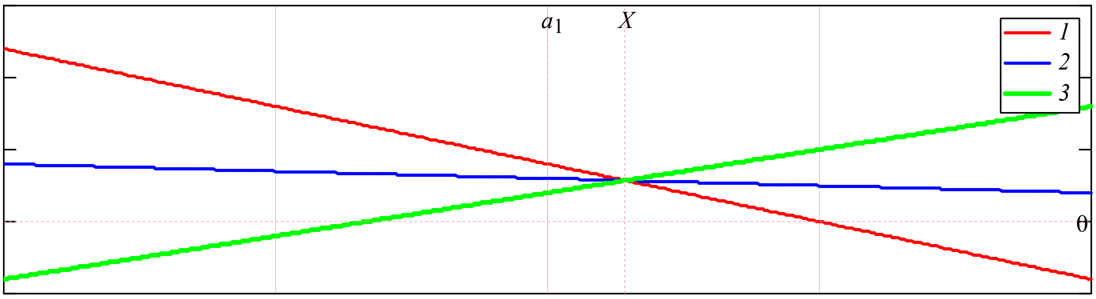

Рис. 3