

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

— • —
Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

В. Б. БУЛАНОВ, С. А. ВОСКОВОЙНИКОВА

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ

Методические указания к выполнению домашнего задания
по курсу
«Сопротивление материалов»

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

В.Б.Буланов, С.А.Воскобойникова

Утверждены
редсоветом МВТУ

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ

Методические указания к выполнению домашнего задания

по курсу

"Сопротивление материалов"

Под редакцией С.И.Пешкова

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены и одобрены кафедрой К-5 12.12.86 г., методической комиссией факультета К 24.12.86 г. и учебно-методическим управлением 29.01.87 г.

Рецензент к.т.н. доц. Зворыкин В.И.

© Московское высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

Оглавление

1. Раскрытие статической неопределимости стержневых систем методом сил	3
2. Расчет конструкций по несущей способности	13
3. Примеры решения статически неопредели- мых задач	17

Редактор О.М.Королева

Корректор Л.И.Малютина

Заказ 904 Объем 2,25 п.л. (2,25 уч.-изд.л.) Тираж 300 экз.
Бесплатно. Подписано к печати 06.07.87 г. План 1987 г., № 80.

Типография МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

1. РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Степень статической неопределенности

Статически определимые стержневые системы характеризуются минимально необходимым числом связей, которые обеспечивают кинематическую неизменяемость этих систем. Опорные реакции и внутренние усилия в таких системах определяются из уравнений статического равновесия. В статически неопределимых стержневых системах число связей превышает минимально необходимое, т.е. число неизвестных опорных реакций и внутренних усилий больше числа уравнений статики. Разность между числом неизвестных силовых факторов и числом независимых уравнений статики, которые могут быть составлены для данной системы, называется степенью статической неопределенности. Фактически степень статической неопределенности равна числу дополнительных связей, наложенных на статически определимую, кинематически неизменяемую систему.

Метод сил

Для раскрытия статической неопределенности наиболее часто в механике сплошных сред используют метод сил. Он состоит в том, что данную статически неопределимую систему освобождают от дополнительных связей, внутренних и внешних, заменяя их действие соответствующими неизвестными силовыми факторами. Величина этих силовых факторов определяется из условия выполнения ограничений по перемещениям, которые накладывают на систему дополнительные связи. Эти условия описываются уравнениями перемещений, которые называются каноническими уравнениями метода сил.

Для иллюстрации применения метода сил рассмотрим простой пример: раскрыть статическую неопределенность изображенной на рис. I балки и построить эпюру внутренних изгибающих моментов.

Из четырех наложенных на балку связей (три в левой опоре и одна в правой) одна является дополнительной, следовательно, балка один раз статически неопределима. Для раскрытия статической

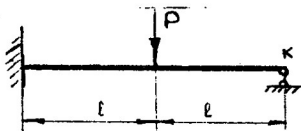


Рис. I

неопределенности методом сил конструкцию балки надо превратить в статически определимую, т.е. выбрать основную систему. Снять

одну дополнительную связь можно либо отбросив опору K , либо врезав шарнир в любом сечении балки. На рис.2 показаны два варианта основной системы, с помощью которых может быть решена поставленная задача.



Рис.2

Чтобы статически определяемая система, полученная из заданной статически неопределимой системы, была эквивалентна ей, отброшенные дополнительные связи заменяются соответствующими неизвестными силовыми факторами. На рис.3 изображены два варианта эквивалентной системы, соответствующие выбранным основным системам, а также перемещения в направлении отброшенной связи, вызванные внешней нагрузкой (δ_{iP}) и реакцией X_1 ($\delta_{11}X_1$).

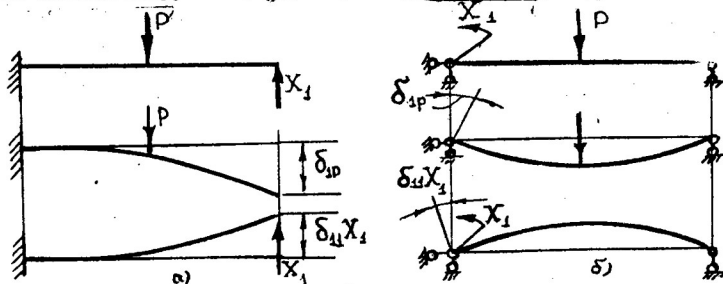


Рис.3

Очевидно, что в рассматриваемой балке сумма перемещений в направлении отброшенной связи должна быть равна нулю, т.е. уравнение перемещений или каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{iP} + \delta_{11}X_1 = 0, \quad (I)$$

где δ_{iP} — перемещение в направлении отброшенной связи, вызванное в статически определимой балке только заданной нагрузкой;

δ_{11} — смещение в направлении отброшенной связи, вызванное

единичным силовым фактором, действующим в направлении X_1 .

Коэффициенты σ_{ip} и σ_{ii} канонического уравнения (I) определяются так же, как перемещения в статически неопределимых системах: либо с использованием интеграла Мора, либо правила Верещагина.

Определение σ_{ip} (рис. 4)

$$\sigma_{ip} = -\frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} Pl \cdot l \right) \frac{5}{3} l \right] = -\frac{5 Pl^3}{6 EI_x}; \quad \sigma_{ip} = -\frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \cdot 2l \right) \frac{1}{2} \right] = -\frac{Pl^2}{4 EI_x}.$$

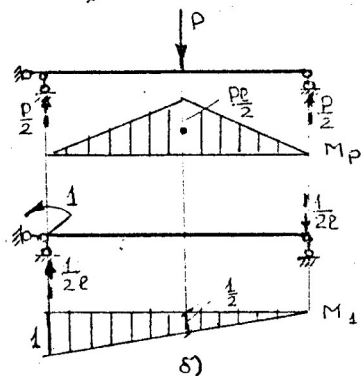
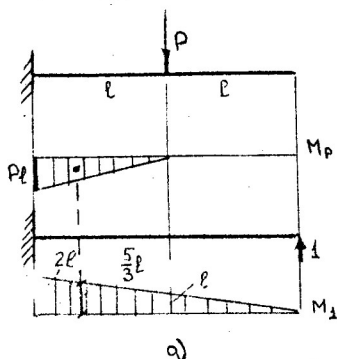


Рис. 4

Определение σ_{ii} (рис. 5)

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} 2l \cdot 2l \right) \frac{2}{3} \cdot 2l \right] = \frac{8 l^3}{3 EI_x} \dots \quad \sigma_{ii} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} 1 \cdot 2l \right) \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{2l}{3 EI_x}.$$

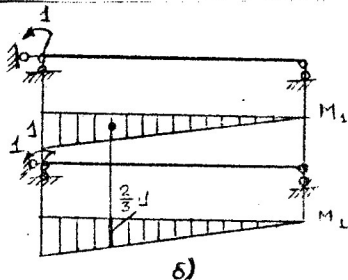
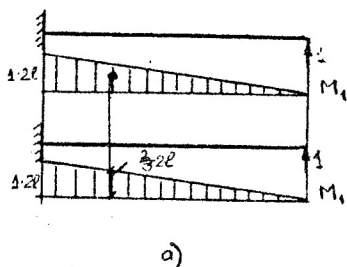


Рис. 5

ж/ Здесь и далее обозначения (а), (б), (в) соответствуют вариантам а, б, в рисунков.

Обычно при определении коэффициентов δ_{1P} и δ_{11} эпюру моментов от единичного силового фактора (единичную эпюру) изображают один раз. Решение уравнения (I) дает искомое значение $X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$.

$$X_1 = \frac{5}{16} P \quad (a); \quad X_1 = \frac{3}{8} P e \quad (б).$$

Оба варианта решения приводят к одной и той же результирующей эпюре внутренних изгибающих моментов, изображенной на рис.6.

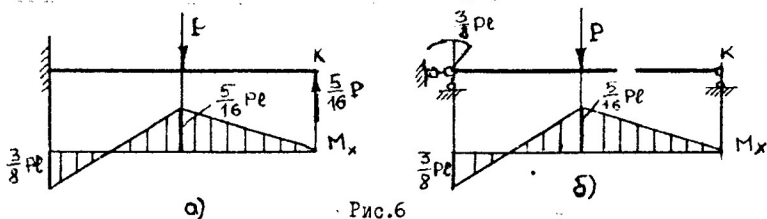


Рис.6

Определение перемещений в статически неопределимых системах. Проверка правильности решения

После раскрытия статической неопределимости исходную статически неопределимую систему можно заменить любой, эквивалентной ей, статически определимой (см.рис.6). Это позволяет упростить определение перемещений, так как в этом случае единичный силовой фактор в направлении искомого перемещения прикладывается к основной системе, а не к заданной статически неопределимой балке.

Так, для определения угла поворота сечения K в рассмотренной выше балке единичный момент следует приложить в сечении K любой основной системы (рис.7), например изображенной на рис.2а или 2б.

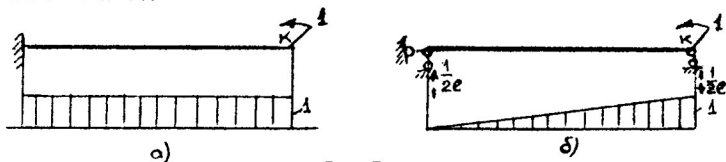


Рис.7

Угол поворота сечения K определяется умножением суммарной эпюры моментов (см.рис.6) на единичную эпюру (см.рис.7), как показано на рис.8:

для варианта а

$$\theta_K = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} P e \cdot 2e \right) \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} P e \cdot e \right) \cdot 1 \right] = \frac{P e^2}{8 E I_x};$$

для варианта б

$$\theta_K = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} Pl \cdot 2l \right) \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} Pl \cdot l \right) \frac{1}{6} \right] = \frac{Pl^2}{8EI_x}$$

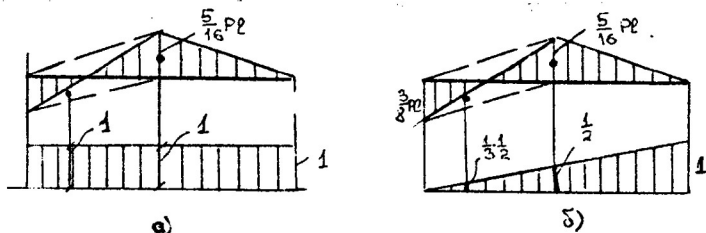


Рис.8

Проверкой правильности решения могут служить:

1) решение задачи двумя способами с использованием различных вариантов основной системы. В разобранный пример решение с использованием двух различных основных систем (см.рис.2) приводит к получению одной и той же эпюры изгибающих моментов (см. рис.6);

2) определение перемещения одного и того же сечения с использованием различных основных систем, так как это было сделано выше (см.рис.8);

3) определение заведомо известного перемещения. Например, при решении задачи по варианту б в качестве проверки можно определить вертикальное перемещение сечения К, для чего суммарную эпюру изгибающих моментов (см.рис.6б) надо умножить на единичную эпюру, изображенную на рис.5а. При правильном решении это перемещение должно быть равно нулю, так как сечение К в заданной балке закреплено (рис.9): $\delta_K = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} Pl \cdot 2l \right) l - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} Pl \cdot l \right) \cdot \frac{5}{3} l \right] = 0$.

Раскрытие статической неопределимости рам, определение перемещений, правильность решения проверяется по той же схеме. Ниже приведено решение для один раз статически неопределимой плоской рамы. Здесь раскрытие статической неопределимости проводится с использованием двух вариантов основной системы (рис.10-16).

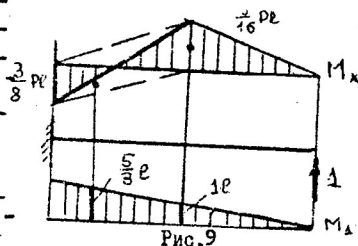


Рис.9

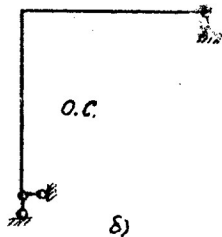
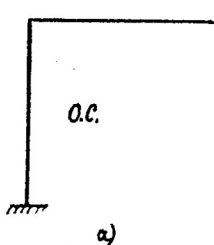
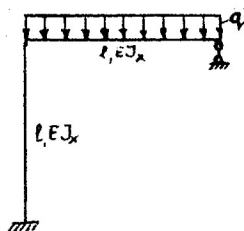


Рис. I0

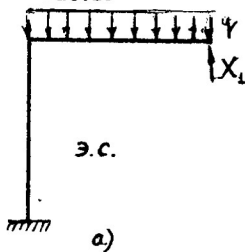


Рис. II

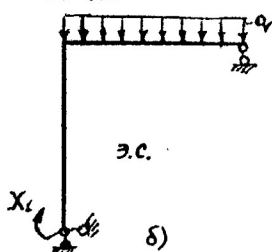


Рис. I2

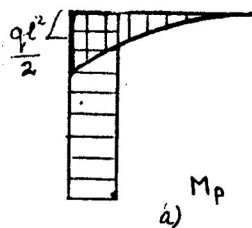


Рис. I3

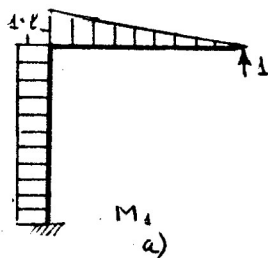
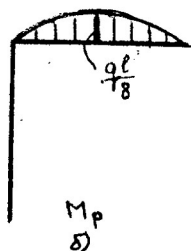
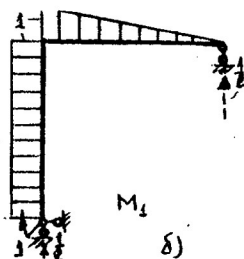


Рис. I4



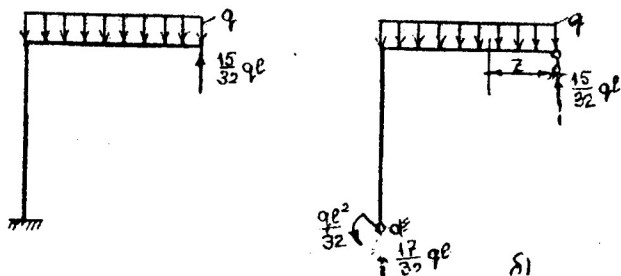


Рис.15

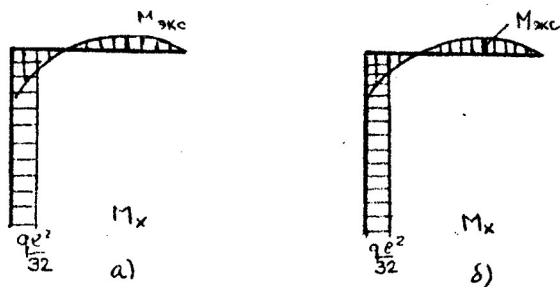


Рис.16

Для определения неизвестной реакции X_1 , необходимо решить каноническое уравнение (I), коэффициенты которого также являются перемещениями в направлении отброшенной связи и вычисляются с использованием правила Ворещагина (см.рис.13, 14):

для варианта а

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \right) \frac{3}{4} \cdot l + \left(\frac{ql^2}{2} \cdot l \right) \cdot l \right] = -\frac{5}{8} \frac{ql^4}{EI_x};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot l \right) \frac{2}{3} \cdot l + (l \cdot l) \cdot l \right] = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EI_x}; \quad X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{15}{32} ql;$$

для варианта б

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \right) \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{ql^3}{24 EI_x};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + (1 \cdot l) \cdot 1 \right] = \frac{4}{3} \frac{l}{EI_x}; \quad X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{ql^2}{32}.$$

Как и в первом примере, оба варианта решения приводят к получению одной и той же результирующей эпюры изгибающих моментов (см. рис. I6).

Для определения экстремума функции моментов $M_{\text{экс}}$ на горизонтальном участке рамы из условия $dM_x/dz = 0$ находим положение экстремума функции изгибающего момента и его значение (рис. I7):

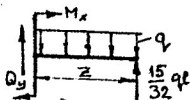


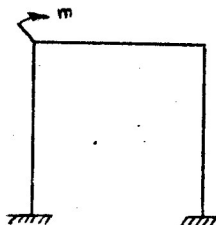
Рис. I7

$$M_x = \frac{15}{32} q l z - \frac{q z^2}{2}; \quad \frac{dM_x}{dz} = \frac{15}{32} q l - q z = 0;$$

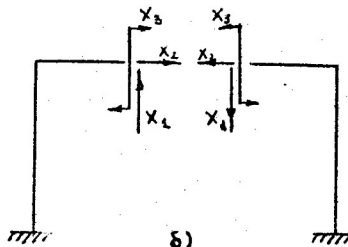
$$z = \frac{15}{32} l; \quad M_{\text{экс}} = \frac{15}{32} q l \cdot \frac{15}{32} l - \frac{(\frac{15}{32} l)^2}{2} = 0,11 q l^2$$

Использование свойства прямой и косой симметрии

В сечениях трижды статически неопределимой плоской рамы, изображенной на рис. I8а, возникают три пары внутренних силовых факторов (рис. I8б), из которых X_1 — кососимметричен, а X_2 и X_3 — симметричны.



а)



б)

Рис. I8

В тех случаях, когда внешняя нагрузка и конструкция рамы имеют общую ось симметрии, в сечениях по оси симметрии отличными от нуля будут те внутренние силовые факторы, которые имеют ту же симметрию, что и внешняя нагрузка. Так, для трижды статически неопределимой плоской рамы (рис. I9а), нагруженной симметрично, в сечении по оси симметрии отличны от нуля только симметричные силовые факторы, изображенные на эквивалентной системе (рис. I9б).

Для определения X_1 и X_2 необходимо решить два канонических уравнения. Так как относительное (взаимное) горизонтальное смещение сечений А и А' под действием внешней нагрузки ($\sigma_{\text{пр}}$)

и внутренних сил ($\sigma_{11}^* X_1, \sigma_{12}^* X_2$) равно нулю, то

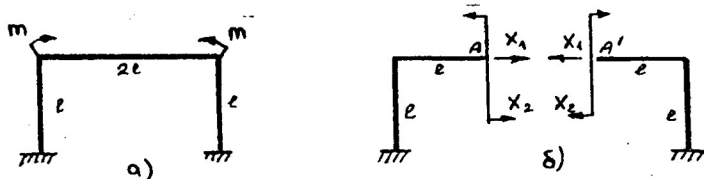
$$\sigma_{1p}^* + \sigma_{11}^* X_1 + \sigma_{12}^* X_2 = 0$$


Рис.19

Относительный (взаимный) угол поворота сечений A и A' под действием внешней нагрузки (σ_{2p}^*) и внутренних сил ($\sigma_{21}^* X_1, \sigma_{22}^* X_2$) также равен нулю:

$$\sigma_{2p}^* + \sigma_{21}^* X_1 + \sigma_{22}^* X_2 = 0.$$

Определяя коэффициенты канонического уравнения по правилу Верещагина, т.е. умножая попарно соответствующие эпюры (рис.20), находим величины X_1 и X_2 .

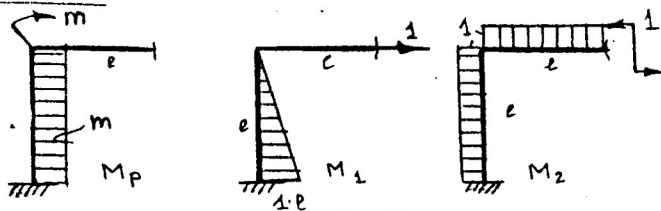


Рис.20

$$\sigma_{1p}^* = \frac{1}{EJ_x} \left[(m \cdot l) \cdot \frac{1}{2} l \right] = \frac{m l^2}{2EJ_x};$$

$$\sigma_{11}^* = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} l l \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] = \frac{l^3}{3EJ_x};$$

$$\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^* = -\frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} l l \right) \cdot 1 \right] = -\frac{l^2}{2EJ_x};$$

$$\sigma_{22}^* = \frac{1}{EJ_x} \left[(1 \cdot l) \cdot l \right] \cdot 2 = \frac{2l}{EJ_x};$$

$$\sigma_{2p}^* = -\frac{1}{EJ_x} \left[(m \cdot l) \cdot 1 \right] = -\frac{m l}{EJ_x}.$$

Подставляя значения коэффициентов в канонические уравнения метода сил

$$\begin{cases} \frac{m\ell^2}{2EJ_x} + \frac{\ell^3}{3EJ_x} X_1 - \frac{\ell^2}{2EJ_x} X_2 = 0; \\ -\frac{m\ell}{EJ_x} - \frac{\ell^2}{2EJ_x} X_1 + \frac{2\ell}{EJ_x} X_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{m}{2} + \frac{\ell}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 = 0; \\ -m - \frac{\ell}{2} X_1 + 2X_2 = 0; \end{cases}$$

находим значения неизвестных силовых факторов X_1 и X_2 :

$$X_1 = -6/5 m/\ell; \quad X_2 = 1/5 m.$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов может быть построена сложением ординат эпюр моментов, построенных отдельно от каждого внутреннего силового фактора (от X_1 и X_2) и от внеш. нагрузки (рис.21).

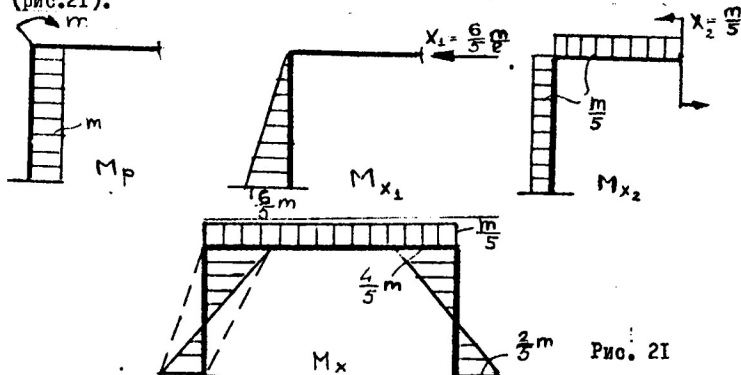


Рис. 21

Для проверки правильности решения определим вертикальное перемещение сечения K , используя основную систему, показанную на рис.22а. Результат умножения суммарной эпюры изгибающих моментов (см.рис.21) на единичную эпюру (рис.22б) должен быть равен нулю, так как сечение K закреплено:

$$\delta_K^* = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{5} m \cdot 2\ell \right) \cdot \ell + \left(\frac{1}{2} \frac{2}{5} m \ell \right) \cdot 2\ell - \left(\frac{1}{4} \frac{4}{5} m \ell \right) 2\ell \right] = 0.$$

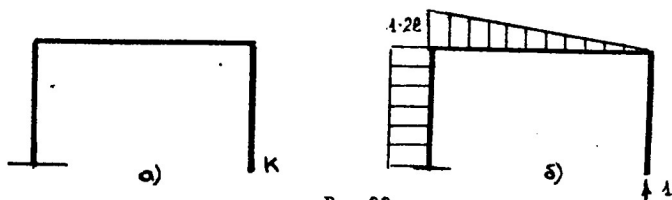


Рис.22

Примечание. Результат умножения симметричной эпюры на кососимметричную не может служить проверкой, так как даже в случае неправильного решения равен нулю.

2. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Предельное значение внутреннего изгибающего момента

Если за пределами упругости материал деформируется по схеме идеально упругопластического материала и его свойства при растяжении и сжатии одинаковы (рис.23а), то в сечении, где внутренний изгибающий момент достиг предельно возможного значения, все напряжения равны пределу текучести σ_T (рис.23б).

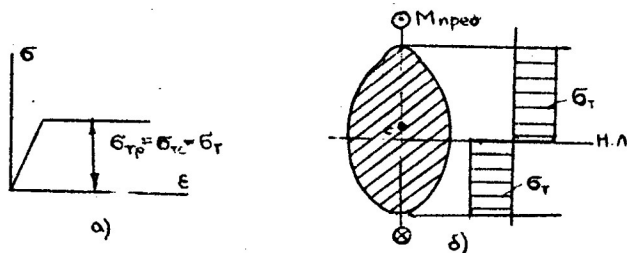


Рис.23

Сечение, в котором возник предельный момент, можно уподобить шарниру с постоянным моментом трения. Такой шарнир называется пластическим шарниром.

Чтобы определить значение предельного момента, необходимо найти положение нейтральной линии. Так как нормальная сила в поперечном сечении при изгибе равна нулю, то нейтральная линия делит площадь пополам. Предельное значение внутреннего изгибающего момента определяется как

$$M_{пред} = \sigma_T (|S|_{н.л.}^{раст} + |S|_{н.л.}^{сжат}),$$

где $|S|_{н.л.}^{раст}$ и $|S|_{н.л.}^{сжат}$ — абсолютная величина статического момента растянутой и сжатой частей сечения относительно нейтральной линии. Таким образом, предельное значение изгибающего момента не зависит от внешней нагрузки, а определяется только свойствами материала (σ_T) и формой поперечного сечения ($|S|_{н.л.}$). Для сечений, имеющих одну ось симметрии, нейтральная линия в пласти-

ческом шарнире не проходит через центр тяжести сечения.

На рис.24 приведены примеры определения предельного момента для поперечных сечений различной формы.

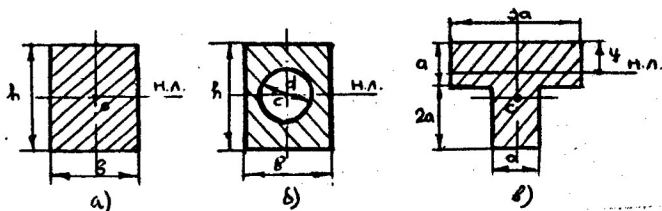


Рис.24

Нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения в вариантах а и б и соответственно предельные моменты

$$M_{пред} = 2\sigma_T \left[\left(b \cdot \frac{h}{2} \right) \frac{h}{4} \right] = \sigma_T \frac{bh^2}{4} \dots$$

$$M_{пред} = 2\sigma_T \left[\left(b \cdot \frac{b}{2} \right) \cdot \frac{b}{4} - \left(\frac{\pi d^2}{8} \right) \frac{2d}{3\pi} \right] = 2\sigma_T \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{d^3}{12} \right].$$

В варианте в нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения, ее положение находят из условия равенства растянутой и сжатой площадей:

$$F = 5a^2; \quad \frac{F}{2} = \frac{5}{2} a^2; \quad y = \frac{5}{6} a;$$

$$M_{пред} = \sigma_T \left[\left(\frac{5}{2} a^2 \right) \cdot \frac{5}{12} a + \left(\frac{1}{6} a \cdot 3a \right) \frac{1}{12} a + \left(2a^2 \right) \frac{7}{6} a \right] = \frac{41}{12} \sigma_T a^3.$$

Предельная нагрузка

Исчерпание несущей способности стержневой системы характеризуется превращением ее в механизм. Нагрузка, вызывающая потерю несущей способности, называется предельной нагрузкой.

Для превращения статически определимой системы в механизм достаточно образования одного пластического шарнира. Предельная нагрузка в этом случае определяется из условия, что максимальный внутренний изгибающий момент достигнет своего предельного значения: $M_{max} = M_{пред}$. Так, для балки (рис.25а) потеря несущей способности произойдет при условии, что $M_{max} = P \cdot l$ достигнет значения $M_{пред}$. $P_{пред} \cdot l = M_{пред}$, откуда $P_{пред} = \frac{M_{пред}}{l}$, где $M_{пред}$ определяется, как описано выше.

Для превращения статически неопределимой системы в механизм необходимо, чтобы число пластических шарниров на единицу

превышало степень статической неопределенности.*/

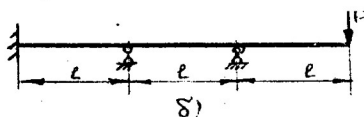
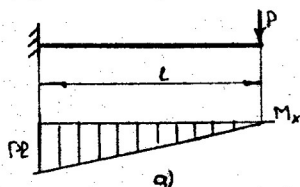


Рис.25

Предельная нагрузка в этом случае определяется из условий равновесия системы в момент образования предельного состояния. Так, для рассмотренной ранее балки (см.рис.1) предельное состояние характеризуется образованием двух пластических шарниров (балка один раз статически неопределима), т.е. в двух сечениях значение внутреннего изгибающего момента станет равным предельному. Это произойдет в сечениях, где изгибающий момент имеет наибольшие значения (см.рис.6). На рис.26а изображена эпюра изгибающих моментов в предельном состоянии, а на рис.26б – схема потери несущей способности балки. Из условия равновесия участков КА и АВ в предельном состоянии получим два уравнения, решая которые, найдем значение предельной нагрузки:

$$\Sigma M_A = 0; Rl = M_{пред}; R = \frac{M_{пред}}{l};$$

$$\Sigma M_B = 0; R2l - P_{пред} \cdot l = -M_{пред};$$

$$P_{пред} = \frac{3M_{пред}}{l}.$$

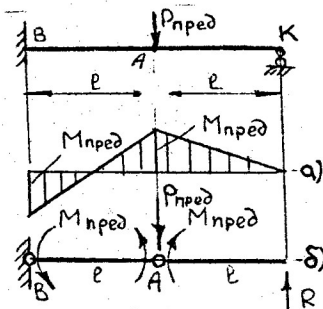
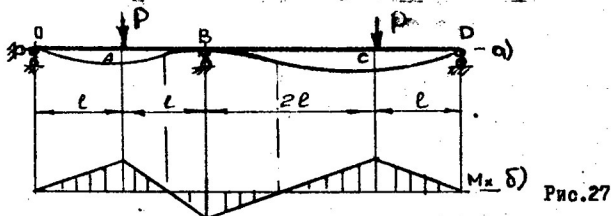


Рис.26

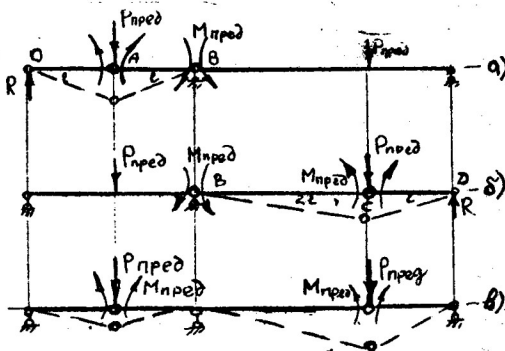
*/ В некоторых статически неопределимых стержневых системах для потери несущей способности достаточно образования одного пластического шарнира (рис.25б).

Для определения несущей способности стержневых систем не обязательно предварительно раскрывать статическую неопределенность. Значение предельной нагрузки может быть определено из рассмотрения различных вариантов истощения несущей способности.

Для балки (рис.27а) по форме изогнутой оси можно изобразить примерный вид эпюры изгибающих моментов (рис.27б). Так как балка один раз статически неопределима, то для потери несущей способности необходимо образование двух пластических шарниров.



На рис.28 приведены два кинематически возможных варианта истощения несущей способности (а и б). Вариант в не является предельным, так как в этом случае не происходит потери несущей способности.



Из равновесия в предельном состоянии определяем предельную нагрузку:

для варианта а

на участке OA $\Sigma M_A = 0$; $R\ell = M_{пред}$; $R = \frac{M_{пред}}{\ell}$;

на участке OB $\Sigma M_B = 0$; $R2\ell - R_{пред}\ell = -M_{пред}$;

$$R_{пред} = \frac{3M_{пред}}{\ell};$$

для варианта б

на участке DC $\Sigma M_C = 0$; $R\ell = M_{пред}$; $R = \frac{M_{пред}}{\ell}$;

на участке DB $\Sigma M_B = 0$; $R3\ell - R_{пред} \cdot 2\ell = -M_{пред}$;

$$R_{пред} = \frac{2M_{пред}}{\ell}.$$

из всех кинематически возможных вариантов реализуется тот, которому соответствует наименьшее значение предельной нагрузки, т.е.

$$R_{пред} = \frac{2M_{пред}}{\ell}.$$

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ

Задача I

Для балки (рис.29) постоянной жесткости EJ_x требуется:

1) раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x , изобразить вид изогнутой оси балки;

2) из расчета на прочность определить значение допускаемой нагрузки $q_{доп}$, приняв $\gamma_T = 1,5$, $\ell = 1$ м;

3) определить предельную нагрузку и вычислить коэффициент запаса по предельным нагрузкам.

Материал балки идеально упругопластический, $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 350$ МПа.

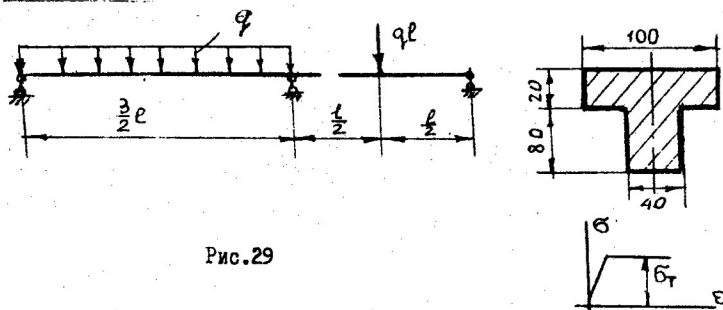


Рис.29

Решение

1. Раскрытие статической неопределимости. На рис.30 изображена рациональная основная система, использование которой упро-

дает вид эпюры моментов от заданной нагрузки, а следовательно, и вычисление коэффициентов канонического уравнения δ_{pp} и δ_{H1} , которые представляют собой взаимные углы поворота сечений на средней опоре, вызванные внешней нагрузкой и единичным моментом в направлении X_1 , — $\delta_{H0} + \delta_{H1}, X_1 = 0$.

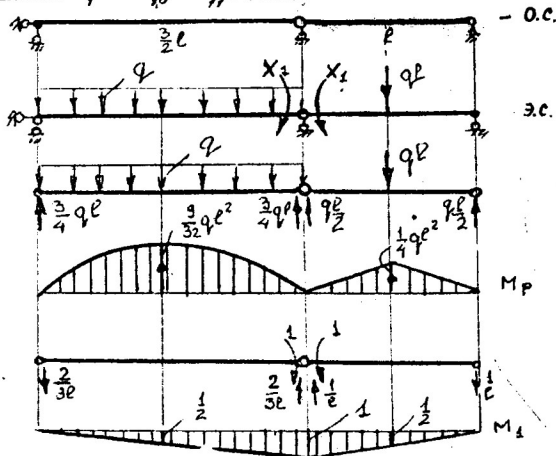


Рис.30

Определение коэффициентов канонического уравнения:

$$\delta_{H1} = \frac{1}{EI_X} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} l \right) \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \right) \frac{2}{3} \right] = \frac{5}{6} \frac{l}{EI_X};$$

$$\delta_{pp} = -\frac{1}{EI_X} \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{9}{32} q l^2 \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{4} q l^2 \right) \right] = -\frac{13}{64} \frac{q l^3}{EI_X}; X_1 = \frac{\delta_{pp}}{\delta_{H1}} = \frac{39}{160} q l^2.$$

Определение реакций опор (рис.31). Зная величину изгибающего момента в сечении B и приравнявая ему сумму моментов всех сил слева и справа от сечения B, получаем значение искомых реакций.

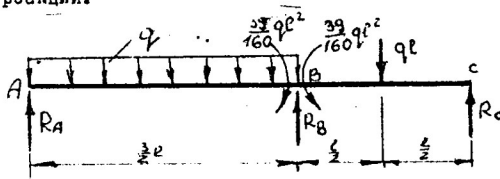


Рис.31

Для левого пролета (AB) $M_B = -\frac{39}{160} q l^2$;

$$R_A \cdot \frac{3}{2} l - q \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{3}{4} l = -\frac{39}{160} q l^2; R_A = \frac{47}{80} q l;$$

Для правого пролета (BC)

$$R_C \cdot l - q l \cdot \frac{l}{2} = -\frac{39}{160} q l^2; R_C = \frac{41}{160} q l.$$

Из условия равновесия всей балки $\Sigma M_A = 0$ определим реакцию в опоре B , а правильность определения реакций проверим из условия равенства нулю проекции всех сил на вертикаль $\Sigma Y_i = 0$:

$$-q \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{3}{4} l - q l \cdot 2l + \frac{41}{160} q l \cdot \frac{5}{2} l + R_B \cdot \frac{3}{2} l = 0; R_B = \frac{265}{160} q l;$$

$$R_A - q \cdot \frac{3}{2} l + R_B - q l + R_C = \left(\frac{47}{80} - \frac{3}{2} + \frac{265}{160} - 1 + \frac{41}{160} \right) q l = 0.$$

Построение эпюр Q_y и M_x (рис.32). Определение экстремума функции M_x на участке AB :

$$M_x = \frac{47}{80} q l z - q z \cdot \frac{z}{2}; \frac{dM_x}{dz} = 0; \frac{47}{80} q l - q z = 0; z = \frac{47}{80} l;$$

$$M_{\text{экс}} = \frac{47}{80} q l \cdot \frac{47}{80} l - \frac{q}{2} \left(\frac{47}{80} l \right)^2 = 0,173 q l^2.$$

2. Определение допускаемой нагрузки. Допускаемая нагрузка определяется из условия

$$\sigma_{\text{max}} \leq \frac{\sigma_T}{n_T} = [\sigma],$$

где

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{J_{xc}} \cdot y_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{\gamma_{xc}}.$$

Здесь M_{max} — максимальный изгибающий момент ($M_{\text{max}} = 0,244 q l^2$);

J_{xc} — главный центральный момент инерции;

y_{max} — расстояние от центральной оси до наиболее удаленной точки сечения

$$\frac{M_{\text{max}}}{J_{xc}} y_{\text{max}} = \frac{\sigma_T}{n_T}; \frac{0,244 q l^2}{J_{xc}} y_{\text{max}} \frac{\sigma_T}{n_T}; q_{\text{доп}} = \frac{J_{xc} \sigma_T}{0,244 l^2 y_{\text{max}} n_T}.$$

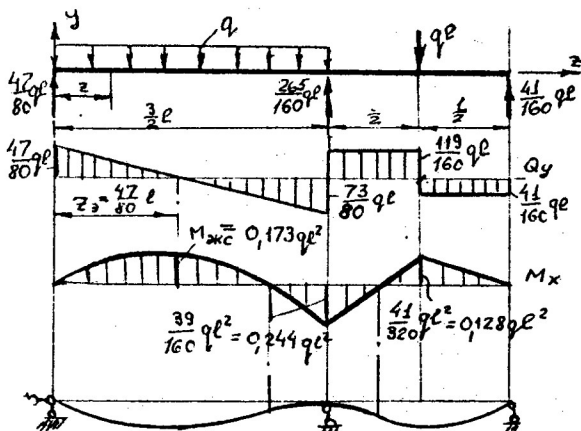


Рис.32

Для определения y_{xc} необходимо знать положение главных центральных осей. Для заданного сечения, имеющего одну ось симметрии, необходимо найти положение центра тяжести y_c (рис.33):

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{F} = \frac{(10.2)1 + 8.4(-4)}{4.8 + 10.2} = -2.08 \text{ см} = -2.08 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

где S_{x_0} — статический момент сечения относительно произвольно выбранной оси X_0 (желательно проводить ось X_0 так., чтобы она делила заданное сечение на простые фигуры, так как это упрощает вычисления);

F — площадь сечения.

Определение главного центрального момента инерции:

$$J_{xc} = J_{x_0} - F(y_c)^2 = \left(\frac{10.2^3}{3} + \frac{2.8^3}{3} \right) - 52(2.08)^2 = 487 \text{ см}^4 = 487 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

Расстояние от центральной оси до наиболее удаленной точки

$$y_{\max} = 5.92 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Подставляя найденные значения, определяем величину $q_{\text{доп}}$:

$$q_{\text{доп}} = \frac{487 \cdot 10^{-8} \cdot 350 \cdot 10^6}{0.244 \cdot 1.2 \cdot 5.92 \cdot 10^{-2} \cdot 1.5} = 78.7 \cdot 10^3 \text{ Н/м} = 78.7 \text{ кН/м}.$$

3. Определение предельной нагрузки. Так как балка один раз статически неопределима, то истощение несущей способности произойдет при возникновении двух пластических шарниров. Эти шарниры образуются в сечениях, где внутренний изгибающий момент имеет наибольшие значения, т.е. в сечениях E и B . Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в предельном состоянии и соответствующая им схема предельного состояния балки изображены на рис.34. Из сравнения эпюры

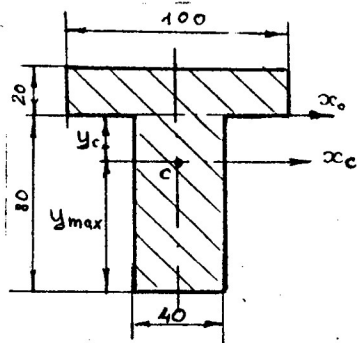


Рис.33

Q_y , полученной при раскрытии статической неопределимости (см. рис.32) и в предельном состоянии (см.рис.34), следует, что положение экстремума функции $-Z_3$ и положение пластического шарнира $Z_{пл.ш}$ не совпадают, так как реакция в опоре A в предельном состоянии не равна реакции в этой опоре при упругих деформациях.

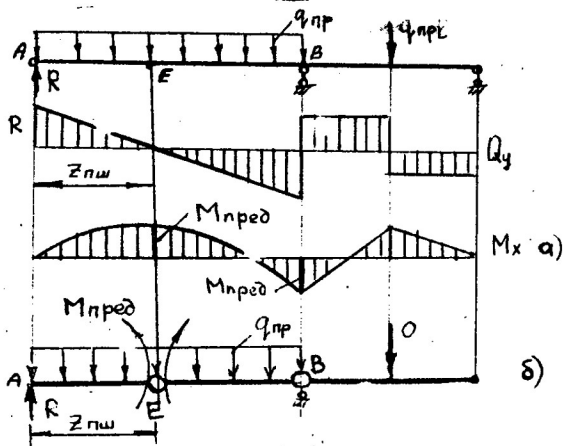


Рис.34

Так как поперечная сила в сечении E равна нулю, то сумма проекций сил, приложенных к участку AE , на ось Y равна нулю:

$$R_A - q_{np} z_{пл} = 0 ; R_A = q_{np} z_{пл}.$$

В сечении *Е* изгибающий момент равен $M_{пред}$, следовательно, сумма моментов всех сил слева от сечения *Е* равна $M_{пред}$:

$$R_A \cdot z_{пл} - q_{np} \frac{z_{пл}^2}{2} = M_{пред} ; M_{пред} = \frac{q_{пред} \cdot z_{пл}^2}{2}.$$

В сечении *В* изгибающий момент равен $-M_{пред}$, следовательно, сумма моментов всех сил слева от сечения *В* равна $-M_{пред}$:

$$R_A \frac{3}{2}l - q_{np} \frac{3}{2}l \cdot \frac{3}{4}l = -M_{пред} ; \frac{3}{2}q_{np}l \left(\frac{3}{4}l - z_{пл} \right) = M_{пред}.$$

Решив совместно полученные уравнения, найдем положение пластического шарнира *Е* и значение предельной нагрузки:

$$z_{пл}^2 = 3l \left(\frac{3}{4}l - z_{пл} \right) ; z_{пл}^2 - 3lz_{пл} - \frac{9}{4}l^2 = 0;$$

$$z_{пл} = -\frac{3}{2}l + \sqrt{\frac{9}{4}l^2 + \frac{9}{4}l^2} = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)l = 0,621l;$$

$$q_{np} = \frac{2M_{пред}}{z_{пл}^2} = 5,19 \frac{M_{пред}}{l^2}.$$

Определение предельного момента. Положение нейтральной линии находим из условия равенства растянутой и сжатой половин площади поперечного сечения (рис.35):

$$F = 52 \text{ см}^2 ; \frac{1}{2}F = 26 \text{ см}^2 ; y_{нл} \cdot 4 = 26 ; y_{нл} = 6,5 \text{ см}.$$

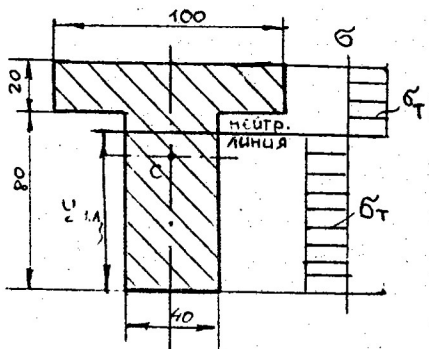


Рис.35

Предельный момент

$$M_{пред} = G_T \left(10 \cdot 2,25 + 4 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} + 4 \cdot 6,5 \cdot \frac{6,5}{2} \right) \cdot 10^6 = 350 \cdot 139 = 48,6 \text{ кН/м.}$$

Предельная нагрузка

$$q_{пр} = 5,19 \frac{M_{пред}}{l^2} = 5,19 \frac{48,6 \cdot 10^3}{1,8} = 252 \text{ кН/м.}$$

Коэффициент запаса по предельным нагрузкам

$$n = \frac{q_{пред}}{q_{дон}} = \frac{258}{78,7} = 3,2.$$

Задача 2

Для рамы (рис.36) постоянной жесткости ($EJ_x = \text{const}$) требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределенность и построить эпюру изгибающих моментов;
- 2) определить горизонтальное перемещение сечения К;
- 3) проверить правильность решения.

Решение

I. Раскрытие статической неопределенности (рис.37). Определение коэффициентов канонического уравнения и X_1 :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} l \cdot l \right) \frac{3}{2} l + (l l) \frac{3}{2} l + \left(\frac{1}{2} l l \right) \frac{5}{3} l + \left(\frac{1}{2} 2l \cdot 2l \right) \frac{4}{3} l \right] = \frac{16 l^3}{3 EJ_x};$$

$$\delta_{1p} = -\frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{3} 2ql^2 \cdot 2l \right) \frac{3}{4} 2l + (2ql^2 \cdot l) \frac{3}{2} l + \left(\frac{1}{2} 2ql^2 l \right) \frac{3}{2} l \right] = -\frac{17ql^3}{3 EJ_x};$$

$$X_1 = 17/16 ql.$$

Определение реакций опор (рис.38), построение эпюры изгибающих моментов:

$$\Sigma R_y = 0; R_A = \frac{17}{16} ql;$$

$$\Sigma M_A = 0; -2ql \cdot l + \frac{17}{16} ql \cdot l + R_B l = 0 \quad R_B = \frac{15}{16} ql;$$

$$\Sigma M_B = 0; -H_A l + \frac{17}{16} ql \cdot l = 0 \quad H_A = \frac{17}{16} ql.$$

Определение экстремума функции изгибающего момента:

$$M_x = \frac{17}{16} qlz - ql \frac{z^2}{2}; \quad \frac{dM_x}{dz} = 0; \quad \frac{17}{16} ql - qlz = 0; \quad z_3 = \frac{17}{16};$$

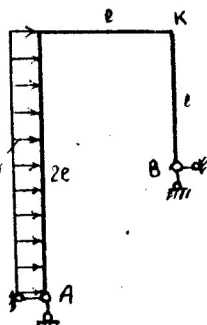


Рис.36

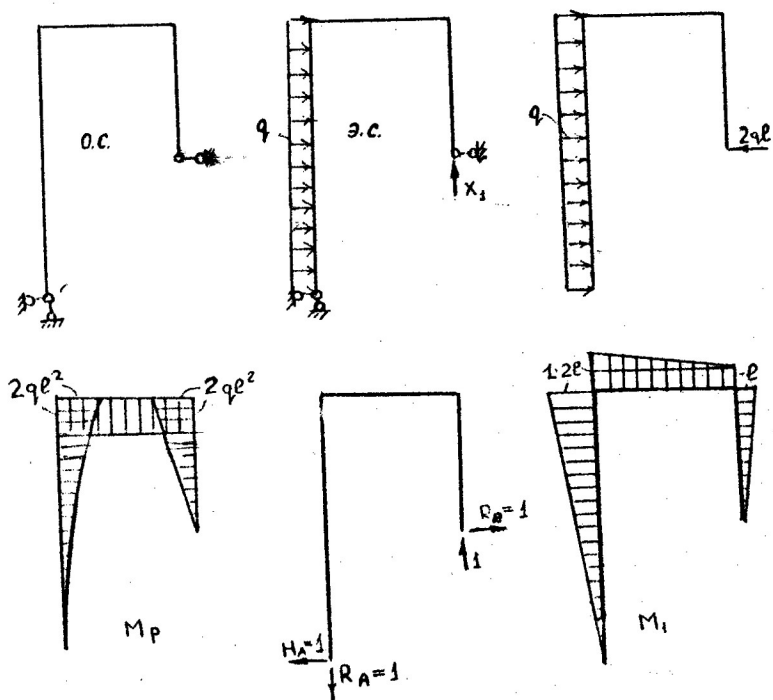


Рис.31

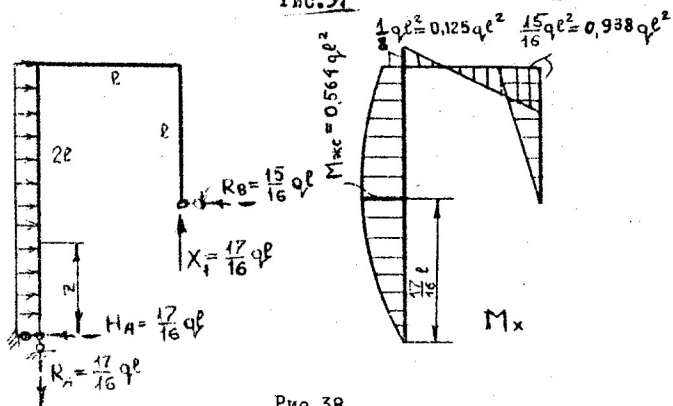


Рис.38

$$M_{жс} = \frac{17}{16} ql \frac{7}{16} l - \frac{q}{2} \left(\frac{17}{16} l \right)^2 = 0,564 ql^2.$$

2. Определение перемещения σ_K^{rop} (рис.39):

$$\begin{aligned} \sigma_K^{rop} &= \frac{1}{EJ_x} \left[-\left(\frac{1}{2} \frac{1}{8} ql^2 2l \right) \frac{2}{3} 2l + \left(\frac{2}{3} 2l \cdot \frac{q(2l)^2}{8} \right) l - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{8} ql^2 l \right) 2l + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{15}{16} ql \cdot l \right) l + \left(\frac{1}{2} \frac{15}{16} ql^2 \right) \frac{2}{3} 2l \right] = \frac{ql^4}{EJ_x} \left[-\frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{8} + \frac{15}{8} + \frac{5}{8} \right] = \\ &= \frac{29}{48} \frac{ql^4}{EJ_x}; \quad \sigma_K^{rop} = \frac{29}{48} \frac{ql^4}{EJ_x}. \end{aligned}$$

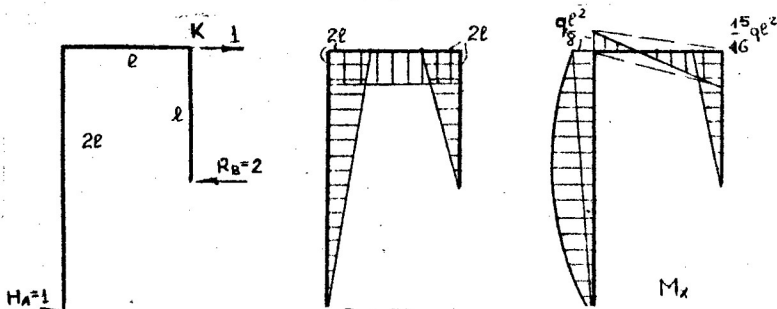


Рис.39

3. Проверка правильности решения. Найдем σ_K^{rop} , используя другой вариант основной системы (рис.40):

$$\begin{aligned} \sigma_K^{rop} &= \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{8} ql \cdot l \right) \frac{1}{3} l + \left(\frac{1}{2} \frac{15}{16} ql^2 l \right) \frac{2}{3} l + \left(\frac{1}{2} \frac{15}{16} ql^2 l \right) \frac{2}{3} l \right] = \\ &= \frac{29}{48} \frac{ql^4}{EJ_x} \end{aligned}$$

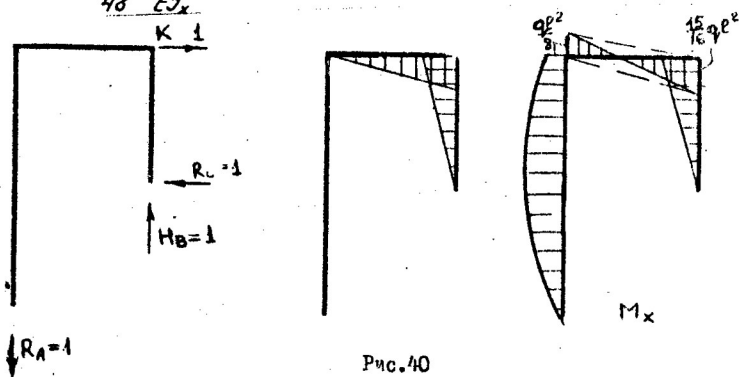


Рис.40

Задача решена верно, так как оба решения дали один и тот же результат.

Задача 3

Для рамы (рис.41) постоянной жесткости ($EJ_x = \text{const}$) требуется.

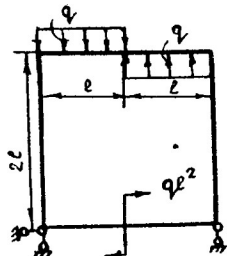


Рис.41

- 1) раскрыть статическую неопределенность и построить эпюру изгибающих моментов;
- 2) определить угол поворота сечения B ;
- 3) проверить правильность решения.

Решение

1. Раскрытие статической неопределенности. Заданная рама (см.рис.41) трижды статически неопределима. Но так как нагрузка и рама имеют общую ось симметрии, то в сечении рамы по оси симметрии отличными от нуля будут только силовые факторы, которые имеют ту же симметрию, что и внешняя нагрузка. Внешняя нагрузка кососимметрична, следовательно, отличным от нуля будет только X , а X_2 и X_3 равны нулю (рис.42).

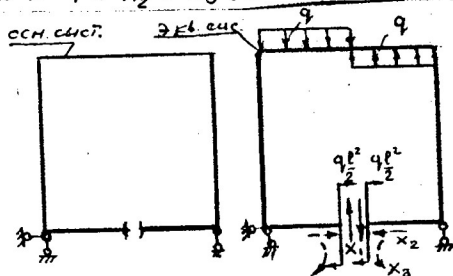


Рис.42

пределение коэффициентов канонического уравнения метода сил (рис.43). Реакции в опорах рамы отсутствуют, так как внешняя нагрузка самоуравновешена:

$$C_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} l l \right) \frac{2}{3} l \cdot 4 + (l \cdot 2l) \cdot l \cdot 2 \right] = \frac{16}{3} \frac{l^3}{EJ_x};$$

$$C_{12} = \frac{1}{EJ_x} \left[- \left(\frac{1}{2} l l \right) \frac{1}{2} q l^2 - (l \cdot 2l) \frac{1}{2} q l^2 - \left(\frac{1}{2} l l \right) \frac{2}{3} \frac{1}{2} q l^2 - \left(\frac{2}{3} \frac{1}{2} q l^2 l \right) \times \frac{1}{2} l \right] \cdot 2 = - \frac{35}{12} \frac{q l^4}{EJ_x}; \quad X_1 = - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{35}{64} q l.$$

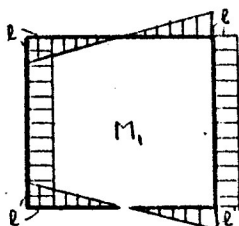
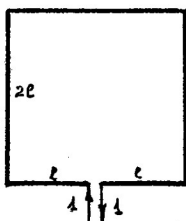
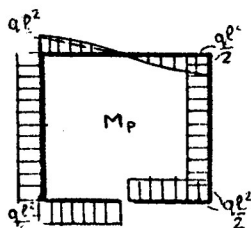
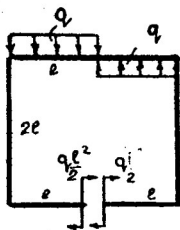


Рис.43

Построение суммарной эпюры изгибающих моментов (рис.44).

Определение экстремума функции изгибающих моментов:

$$M_x = \frac{1}{2} q l^2 - \frac{35}{64} l(l-z) - \frac{q z^2}{2} = -\frac{3}{64} q l^2 + \frac{35}{64} q l z - \frac{q z^2}{2};$$

$$\frac{dM_x}{dz} = 0; \quad \frac{35}{64} q l - q z = 0; \quad z_0 = \frac{35}{64} l;$$

$$M_{\text{эк}} = -\frac{3}{64} q l^2 + \frac{35}{64} q l \cdot \frac{35}{64} l - \frac{q}{2} \left(\frac{35}{64} l \right)^2 = 0,103 q l^2.$$

2. Определение угла поворота сечения B (рис.45):

$$\theta_B = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{3}{64} q l^2 \cdot 2l \right) \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} \frac{70}{64} q l^2 \cdot 2l \right) \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{64} q l^2 \cdot 2l \right) \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + (q l^2 \cdot \frac{1}{4}) \right] = \frac{5}{192} \frac{q l^3}{EI_x}; \quad \theta_B = 0,026 \frac{q l^3}{EI_x}.$$

3. Проверка правильности решения. Определим взаимное вертикальное смещение сечений I-I (рис.46), которое должно получиться равным нулю, так как вертикальный стержень рамы — сплошной.

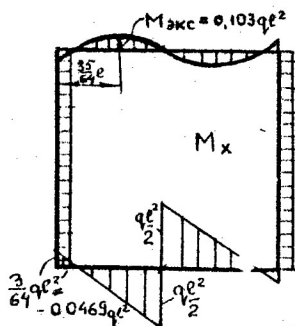
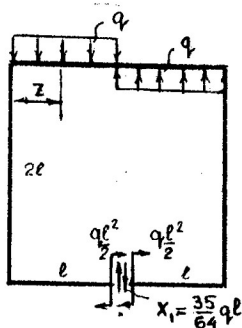
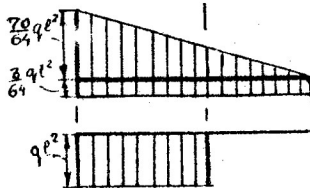
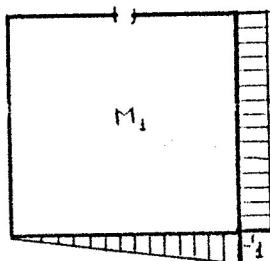
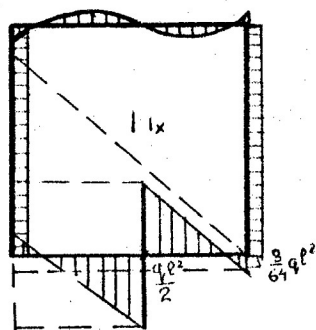
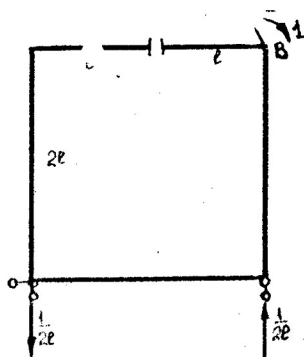


Рис.44



Рассечение эпюры M_x

Рис.45

$$\begin{aligned} \phi_{1-1} = \frac{1}{EJ_x} & \left[\left(\frac{1}{2} \frac{3}{64} q l^2 l \right) \frac{1}{3} l - \left(\frac{2}{3} l \frac{q l^2}{8} \right) \frac{l}{2} - \left(\frac{1}{2} \frac{3}{64} q l^2 l \right) \frac{5}{3} l + \right. \\ & + \left(\frac{2}{3} \frac{q l^2}{8} \right) \frac{3}{2} l - \left(\frac{3}{64} q l^2 2l \right) \frac{2l}{2} - \left(\frac{1}{2} \frac{10}{64} q l^2 2l \right) \frac{4}{3} l + \left(\frac{3}{64} q l^2 2l \right) l + \\ & \left. + \left(q l^2 l \right) \frac{3}{2} l \right] = \frac{q l^4}{EJ_x} \left[\frac{1}{128} - \frac{1}{24} - \frac{5}{128} + \frac{3}{24} - \frac{3}{16} - \frac{35}{24} + \frac{3}{32} + \frac{3}{2} \right] \approx 0. \end{aligned}$$

Нулевой результат показывает, что задача решена правильно.

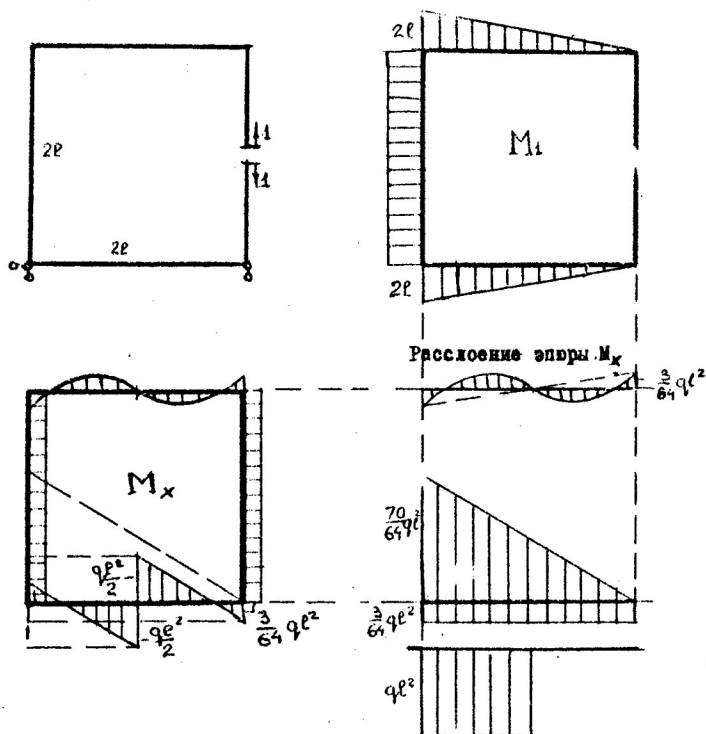


Рис. 46

Задача 4

Определить взаимный угол поворота сечений A и B (ϕ_{AB}) рамы, изображенной на рис. 47. Жесткость рамы постоянна.

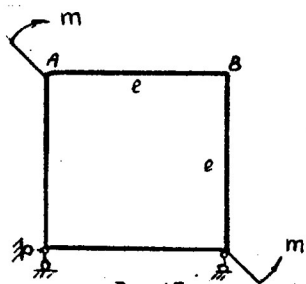


Рис.47

Решение

Заданная рама трижды статически неопределима, и, следовательно, определение θ_{AB} возможно только после раскрытия гатической неопределенности.

Учитывая то обстоятельство, что внешняя нагрузка уравновешена относительно любого сечения рамы, т.е. реакции во внешних связях отсутствуют, можно использовать свойство

симметрии для уменьшения числа неизвестных внутренних силовых факторов. На рис.48 приведены два варианта основной системы, а на рис.49 — соответствующие им эквивалентные системы.

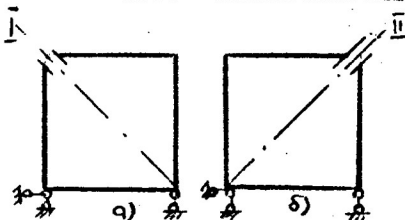


Рис.48

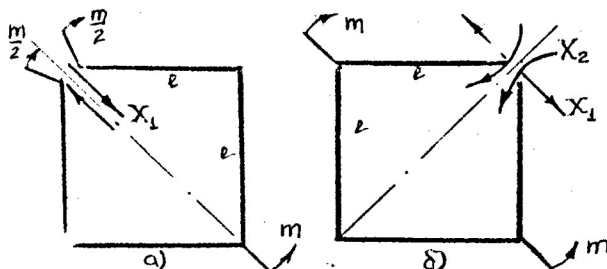


Рис.49

Рациональным вариантом основной системы является вариант а) (см.рис.49), так как внешняя нагрузка в этом случае кососимметрична относительно оси I и в сечении по оси симметрии отличен от нуля только кососимметричный силовой фактор X_1 . Для определения X_1 необходимо решить одно каноническое уравнение метода сил

$$\sigma_{11} X_1 + \sigma_{1p} = 0; \quad X_1 = -\frac{\sigma_{1p}}{\sigma_{11}}.$$

В варианте б нагрузка симметрична относительно оси $\bar{II}$ и в сечении по оси симметрии возникают только симметричные силовые факторы X_1 и X_2 , которые определяются из уравнений

$$\sigma_{11}' X_1 + \sigma_{12}' X_2 + \sigma_{1p}' = 0;$$

$$\sigma_{21}' X_1 + \sigma_{22}' X_2 + \sigma_{2p}' = 0.$$

Решение этой задачи рационально провести, используя основную систему варианта а. На рис.50 изображены эпюры моментов от внешней нагрузки и от единичного силового фактора в направлении X_1 , перемножением которых определяются коэффициенты канонического уравнения σ_{11}' и σ_{1p}' :

$$\sigma_{11}' = \frac{4}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} l \cdot l \right) \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l \right] = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ_x};$$

$$\sigma_{1p}' = -\frac{4}{EJ_x} \left[\left(\frac{m}{2} l \right) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} l \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{ml^2}{EJ_x}; \quad X_1 = -\frac{\sigma_{1p}'}{\sigma_{11}'} = \frac{3\sqrt{2}}{4} m.$$

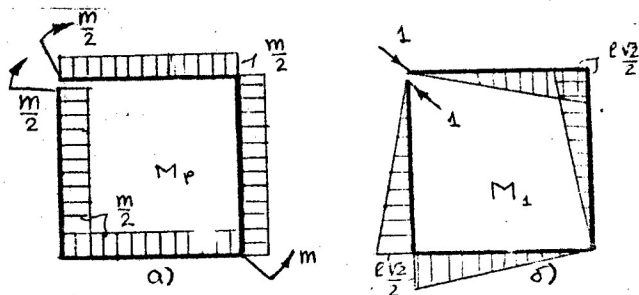


Рис.50

Суммарная эпюра изгибающих моментов M_x (рис.51) получена координатным сложением эпюры M_p и эпюры моментов M_{x1} , от X_1 , ординаты которой получены умножением ординат эпюры M_1 на X_1 .

Для определения взаимного угла поворота сечений А и В необходимо суммарную эпюру внутренних изгибающих моментов M_p , полученную при раскрытии статической неопределимости (см.рис.51), умножить на эпюру от взаимных единичных моментов, приложенных к любой основной системе (например, рис.52)

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{m}{2} \cdot l \right) 1 - \left(\frac{1}{2} \frac{m}{4} l \right) 1 \right] = \frac{ml}{8EJ_x}.$$

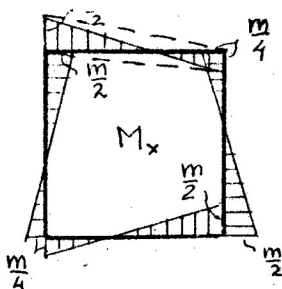


Рис. 51

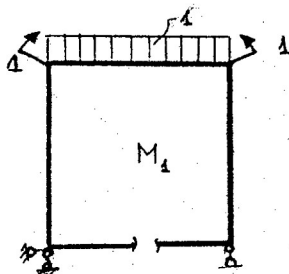


Рис. 52

Задача 5

Раскрыть статическую неопределимость рамы, изображенной на рис. 53.

Решение

В заданной раме дважды статически неопределим внутренний замкнутый контур, а реакции во внешних связях могут быть найдены из уравнений статики.

Для превращения рамы в статически определимую необходимо убрать две дополнительные связи, т.е. либо разрезать внутренний контур по шарниру (рис. 54), либо врезать в него шарниры, но так, чтобы рама при этом оставалась кинематически изменяемой.

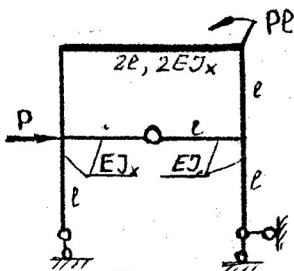


Рис. 53

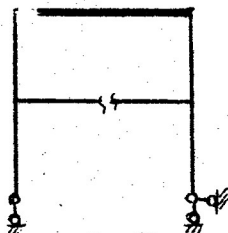


Рис. 54

В сечении по шарниру возникают две пары неизвестных силовых факторов X_1 и X_2 (рис. 55), которые определяются из совместного решения канонических уравнений

$$\begin{aligned} \delta_{11}^* X_1 + \delta_{12}^* X_2 + \delta_{1P}^* &= 0; \\ \delta_{21}^* X_1 + \delta_{22}^* X_2 + \delta_{2P}^* &= 0. \end{aligned}$$

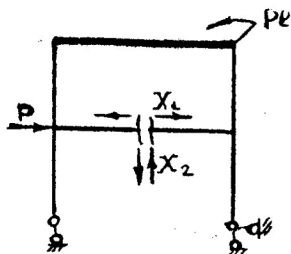


Рис.55

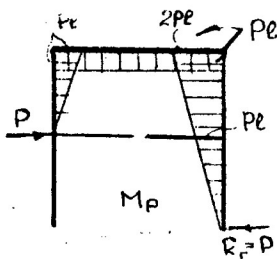


Рис.56

Коэффициенты канонических уравнений определяются попарным умножением соответствующих эпюр, изображенных на рис.56 и 57:

$$\delta_{11}^0 = \frac{1}{EI_x} \left[2 \left(\frac{1}{2} Pl \right) \frac{2}{3} l \right] + \frac{1}{2EI_x} \left[(Pl \cdot 2l) l \right] = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EI_x}; \quad \delta_{12}^0 = \delta_{21}^0 = 0;$$

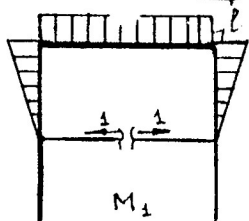
$$\delta_{1P}^0 = -\frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} Pl \right) \frac{2}{3} l + \left(\frac{1}{2} Pl \right) \frac{5}{3} Pl \right] - \frac{1}{2EI_x} \left[(Pl \cdot 2l) l \right] = -\frac{13}{6} \frac{Pl^3}{EI_x};$$

$$\delta_{22}^0 = \frac{1}{EI_x} \left[2 \left(\frac{1}{2} Pl \right) \frac{2}{3} l + 2 \left(Pl \right) l \right] + \frac{1}{2EI_x} \left[\left(Pl \right) \frac{2}{3} l \right] = \frac{3l^3}{EI_x};$$

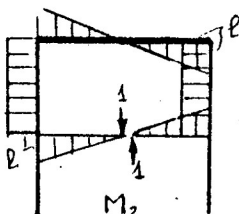
$$\delta_{2P}^0 = \frac{1}{EI_x} \left[- \left(Pl \right) \frac{Pl}{2} + \left(Pl \right) \frac{3}{2} Pl \right] = \frac{Pl^3}{EI_x};$$

$$\frac{5}{3} X_1 - \frac{13}{6} P = 0;$$

$$3X_2 + P = 0; \quad X_1 = \frac{13}{10} P; \quad X_2 = \frac{1}{3} P.$$



а)



б)

Рис.57

Суммарная эпюра внутренних изгибающих моментов M_x (рис.59) построена поординатным сложением эпюр M_P (см.рис.56) и M_{X_1} и M_{X_2} (рис.58).

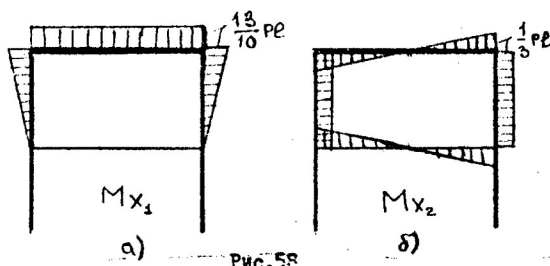


Рис. 58

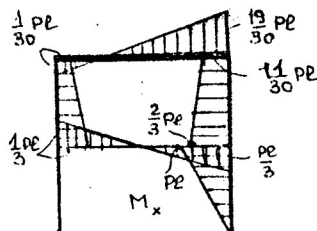


Рис. 59

Задача 6

Раскрыть статическую неопределимость рамы, изображенной на рис. 60.

Решение

Заданная круглая рама (см. рис. 60) — дважды статически неопределима. Для использования свойства косои симметрии внешней нагрузки рассмотрим в качестве основной системы раму, разрезанную по оси симметрии. В сечении по оси симметрии возникнет только косои симметричный силовой фактор X_1 (рис. 61), который определяется из канонического уравнения $\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$

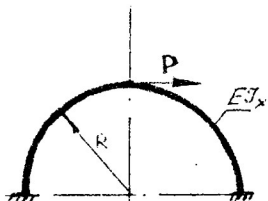


Рис. 60

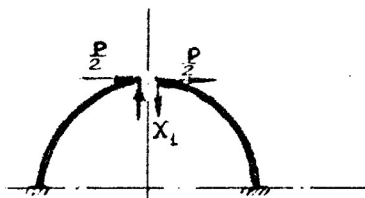


Рис. 61

Коэффициенты этого уравнения, в отличие от предыдущих примеров, определяются с помощью интеграла Мора, так как правило Верещагина для криволинейных стержней неприменимо (рис.62).

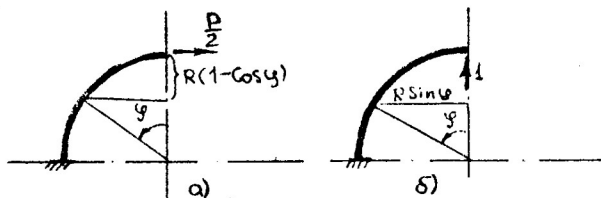


Рис.62

$$M_D = + \frac{P}{2} R (1 - \cos \varphi) \quad (a);$$

$$M_1 = -R \sin \varphi \quad (b);$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{M_1 M_1 ds}{EI_x} = \int \frac{M_1 M_1 R d\varphi}{EI_x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-R \sin \varphi)^2}{EI_x} R d\varphi = \\ &= \frac{2R^3}{EI_x} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \frac{R^3}{EI_x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1P} &= \int \frac{M_D M_1 ds}{EI_x} = \int \frac{M_D M_1 R d\varphi}{EI_x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR}{2} \frac{(1 - \cos \varphi)(-R \sin \varphi)}{EI_x} R d\varphi = \\ &= \frac{PR^3}{EI_x} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d \sin \varphi \right] = -\frac{PR^3}{2EI_x}; \end{aligned}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{\pi}.$$

Суммарный внутренний изгибающий момент M_x (рис.63)

$$M_x = \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) - \frac{PR}{\pi} \sin \varphi.$$

Определение экстремума функции M_x :

$$\frac{dM_x}{d\varphi} = 0; +\frac{1}{2} \sin \varphi_0 - \frac{1}{\pi} \cos \varphi_0 = 0; +\varphi_0 = \frac{2}{\pi} = 0,64; \varphi_0 = 32,75^\circ;$$

$$M_{\text{экс}} = \frac{PR}{2} (1 - 0,84) - \frac{PR}{\pi} 0,54 = -0,09 PR.$$

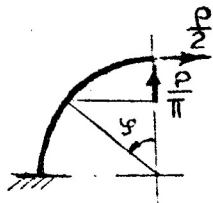


Рис.63

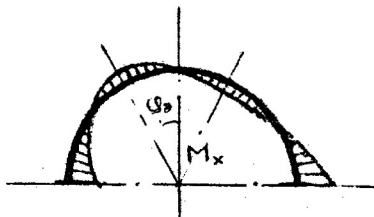


Рис.64

Результирующая эпюра внутреннего изгибающего момента изображена на рис.64.