

РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НАГРУЖЕНИЯ.

ГЛАВА 1 Напряженное состояние в точке нагруженного тела.

1. Сложное напряженное состояние.

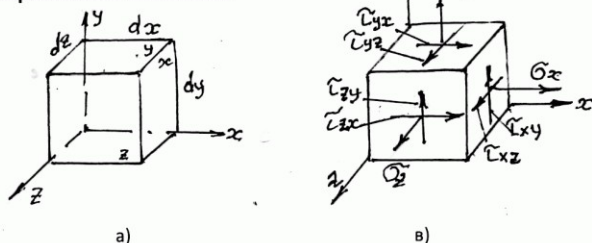


Рис.1

а)

в)

На рис.1 изображен элементарный объем (рис.1а), выделенный в окрестности некоторой точки нагруженного тела, и напряжения, возникающие в его гранях, в общем случае нагружения, (рис.1в).

Примечание: Индексы площадок элементарного объема соответствуют индексам осей, перпендикулярных к этим площадкам, а индексы напряжений соответствуют: первый – индексу площадки, в которой оно действует, второй – индексу оси, которой напряжение параллельно.

Из условий равновесия выделенного элемента (рис.1) следует закон парности касательных напряжений. Т.к. сумма моментов сил относительно каждой оси должна быть равна нулю, например, $\sum M_x = 0$; $\tau_{xy} dz dy \cdot dx - \tau_{yx} dx dz \cdot dy = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; то в смежных площадках касательные напряжения равны между собой $\tau_{ij} = \tau_{ji}$;

Таким образом, напряженное состояние в точке нагруженного тела характеризуется 6-ю компонентами напряженного состояния.

2. Определение напряжений в наклонной площадке с нормалью ν , направляющие косинусы которой - l, m, n .

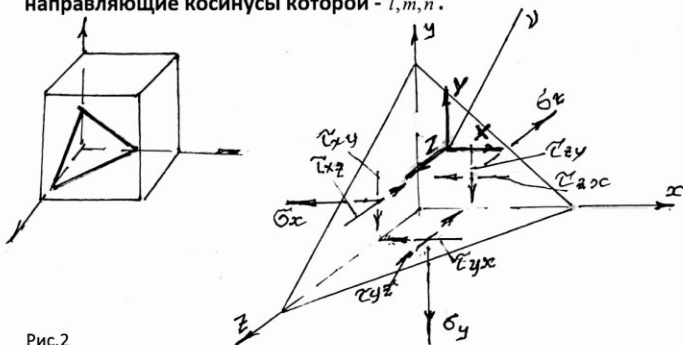


Рис.2

На рис.2 изображена часть элементарного объема (рис.1), отсеченная наклонной плоскостью с нормалью ν , направляющие косинусы которой l, m, n , а площадь наклонной грани равна A . X, Y, Z - составляющие полного напряжения в наклонной площадке, определяются из условий равновесия элемента, т.е. сумма проекций сил на каждую из осей должна быть равна нулю.

$$\begin{aligned} X \cdot A &= \sigma_x A l + \tau_{yx} A m + \tau_{zx} A n & X &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y \cdot A &= \tau_{xy} A l + \sigma_y A m + \tau_{zy} A n & Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z \cdot A &= \tau_{xz} A l + \tau_{yz} A m + \sigma_z A n & Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (1)$$

Где площади боковых граней элементарного объема равны $A_x = Al$; $A_y = Am$; $A_z = An$,

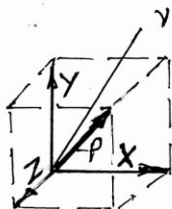
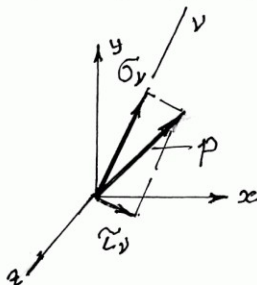


Рис.3

а)



в)

На рис.3а изображено полное напряжение в наклонной площадке и показано разложение вектора полного напряжения на нормальную (σ_ν) и касательную (τ_ν) составляющие (рис.3в).

Полное напряжение в наклонной площадке равно $p = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$;

Нормальное напряжение $\sigma_\nu = Xl + Ym + Zn$;

Касательное напряжение $\tau_\nu = \sqrt{p^2 - \sigma_\nu^2}$;

3. Главные напряжения, главные площадки.

Площадки выделенного элементарного объема, в которых отсутствуют касательные напряжения, называются главными площадками, а нормальные напряжения, действующие в них - главными напряжениями.

Допустим, что в рассмотренном выше примере напряженного состояния в наклонной площадке отсутствуют касательные напряжения ($\tau_\nu = 0$), т.е. она является главной площадкой. Тогда составляющие полного напряжения будут равны

$$X = \sigma l; \quad Y = \sigma m; \quad Z = \sigma n;$$

Система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; & 0 &= (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \\ \sigma m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; & 0 &= \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy} n; \\ \sigma n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n; & 0 &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma)n; \end{aligned} \quad (2)$$

Решая совместно систему уравнений (2), определитель которой должен быть равен нулю, получим уравнение, корни которого являются главными напряжениями:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0; \quad \sigma^3 - J_1 \sigma^2 - J_2 \sigma - J_3 = 0; \quad (3) \text{ Коэффициенты}$$

J_1, J_2, J_3 называются инвариантами напряженного состояния, т.к. их величина не изменяется при повороте координатных осей.

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$J_2 = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2; \quad (3a)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Пример 1.

Определить главные напряжения для напряженного состояния, изображенного на рис.4.

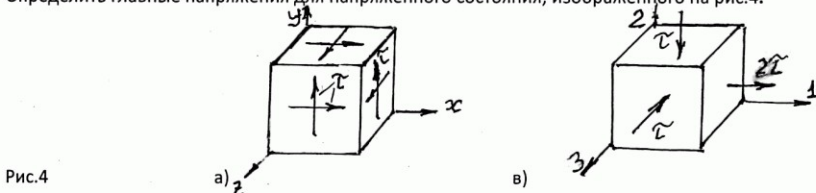


Рис.4

Инварианты напряженного состояния (3a) равны: $J_1 = 0; \quad J_2 = +3\tau^2 \quad J_3 = 2\tau^3;$

Подставляя значение инвариантов в уравнение (3)
 $\sigma^3 - 3\tau^2 \sigma - 2\tau^3 = 0; \quad (\sigma + \tau)(\sigma^2 - \tau\sigma - 2\tau^2) = 0;$ определим главные напряжения, которые в порядке алгебраического убывания равны (рис.4 в)
 $\sigma_1 = 2\tau; \quad \sigma_2 = -\tau; \quad \sigma_3 = -\tau;$

4. Геометрическая интерпретация напряженного состояния в точке нагруженного тела, эллипсоид напряжений.

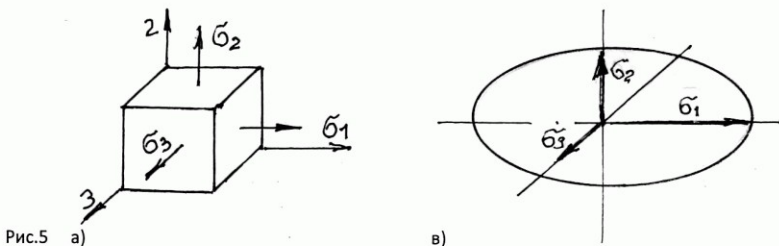


Рис.5

На рис.5а изображено напряженное состояние, у которого все площадки главные и составляющие вектора полного напряжения в наклонной площадке равны

$$X = \sigma_1 l; \quad Y = \sigma_2 m; \quad Z = \sigma_3 n;$$

Из условия, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, получим

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad \text{где } l = \frac{X}{\sigma_1}; \quad m = \frac{Y}{\sigma_2}; \quad n = \frac{Z}{\sigma_3};$$

$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z^2}{\sigma_3^2} = 1; \quad (4)$$

Уравнение(4) является уравнением поверхности, которую описывает конец вектора полного напряжения. Эта поверхность называется *эллипсоидом напряжений*, полюсами которого являются главными напряжениями.

5. Определение главных напряжений в случае, когда одно из них известно.

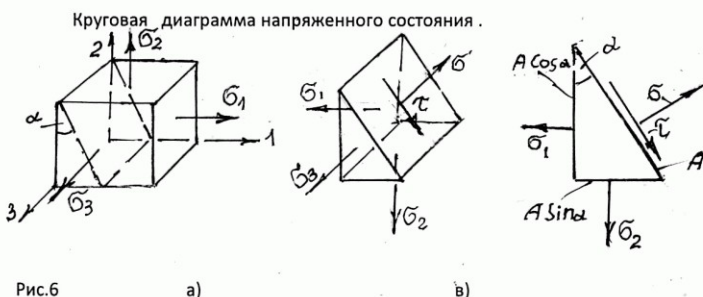


Рис.6

а)

б)

На рис.6 изображено напряженное состояние в некоторой точке нагруженного тела (рис.6а), все площадки которого главные, и напряжения в наклонной площадке, параллельной оси 3 (рис.6в) (пространственная и плоская схемы).

Из условий равновесия отсеченной части элементарного объема, сумма проекций сил на нормальное и касательное направления должны быть равны нулю, получим выражения для нормального и касательного напряжений в наклонной площадке (5)

$$\begin{aligned} \sigma A &= \sigma_1 A \cos \alpha \cos \alpha + \sigma_2 A \sin \alpha \sin \alpha; & \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau A &= \sigma_1 A \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_2 A \sin \alpha \cos \alpha & \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом, что $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$; $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$; ,возведя в квадрат и сложив уравнения (5), получим уравнение окружности (6)

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2; \quad (6)$$

Уравнение окружности (6) является геометрическим местом точек, соответствующих площадкам, параллельным одной из главных осей в системе координат $\sigma + \tau$, (рис.7)

Примечание: Далее на всех диаграммах Мора, для удобства, изображается половина окружностей, отображающая площадки видимых граней элементарного объема.

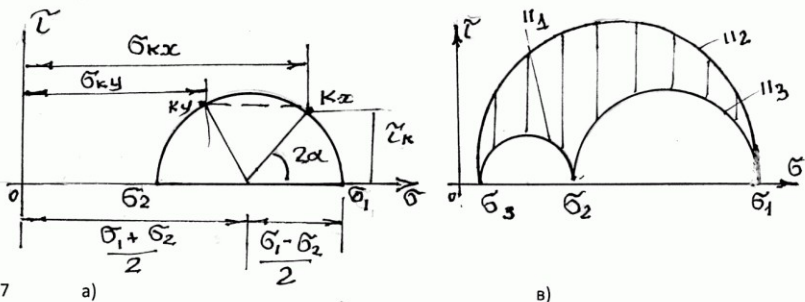


Рис.7

Данная окружность (круг Мора) (рис.7а), опирающаяся на т.т. σ_1 и σ_2 соответствует площадкам, параллельным оси 3. Две аналогичные окружности, можно получить, рассматривая варианты наклонных площадок, параллельных главным осям 1 и 2 (рис.7в).

На круговой диаграмме (рис.7в) любая точка, лежащая на одной из окружностей, изображает напряженное состояние в некоторой площадке, наклоненной под углом " α " к одной из главных осей. Точки в заштрихованной области соответствуют площадкам общего положения.

Построим ту же диаграмму, для напряженного состояния, изображенного на рис.7а,, которое соответствует напряженному состоянию в т.К на рис.6а

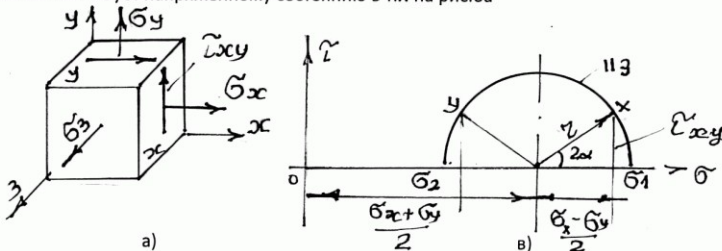


Рис.8

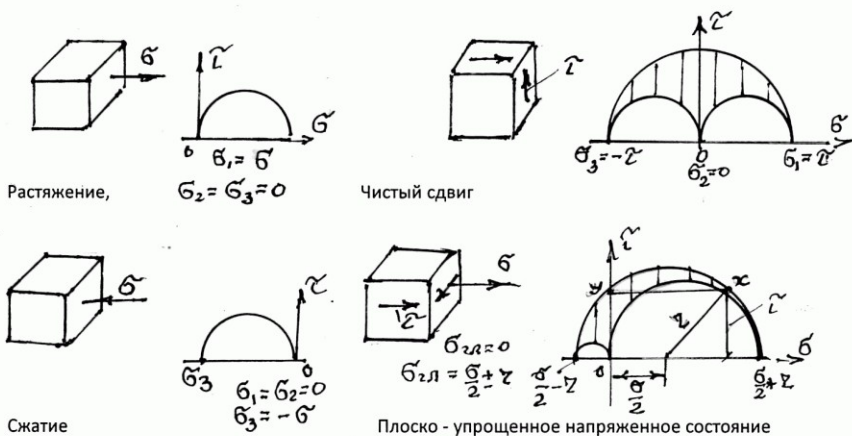
Обе площадки- X и Y изображаются на диаграмме точками, которые лежат на одной и той же окружности, соответствующей площадкам параллельным оси 3. Центр этой окружности (т.С) лежит на расстоянии $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ от начала координат, а радиус окружности

равен $r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$; Полученная окружность опирается на точки 1 и 2, которые соответствуют главным напряжениям и которые определяются по формуле

$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$; (7) Третье главное напряжение - σ_3 известно.

Наибольшее касательное напряжения для данного напряженного состояния равно радиусу большого круга $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$;

Круговые диаграммы для некоторых напряженных состояний



Пример 2

Для напряженных состояний (Рис.9) определить главные напряжения графически и аналитически. Все напряжения заданы в МПа.

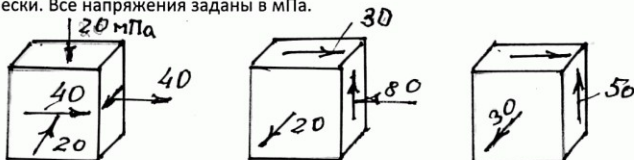


Рис 9.

а)

в)

с)

Аналитическое решение

Все три напряженных состояния имеют одну главную площадку. Два других главных напряжения определяются из формулы (7).

$$\text{Вариант а) } \sigma_{21} = -20 \text{ МПа; } \sigma_{23} = \frac{40 + (-20)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40 - (-20)}{2}\right)^2 + 40^2} = 10 \pm 50;$$

Главные напряжения в порядке алгебраического убывания равны

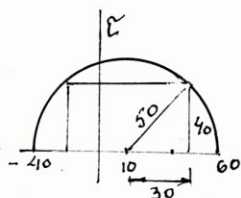
$$\sigma_1 = 60 \text{ МПа, } \sigma_2 = -20 \text{ МПа, } \sigma_3 = -40 \text{ МПа;}$$

$$\text{Вариант в) } \sigma_{21} = +20; \quad \sigma_{23} = \frac{0 + (-80)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - (-80)}{2}\right)^2 + 30^2} = 40 \pm 50$$

$$\sigma_1 = 20 \text{ МПа; } \sigma_2 = 10 \text{ МПа; } \sigma_3 = -90 \text{ МПа;}$$

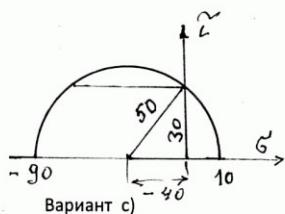
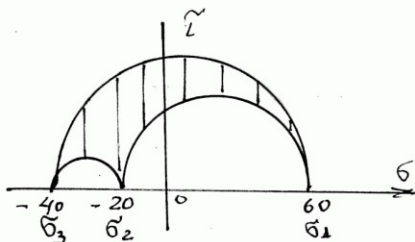
$$\text{Вариант с) } \sigma_{23} = 30 \text{ МПа; } \sigma_{21} = \pm 50 \text{ МПа; } \sigma_1 = 50 \text{ МПа; } \sigma_2 = 30 \text{ МПа; } \sigma_3 = -50 \text{ МПа;}$$

Графическое решение.
Вариант а)

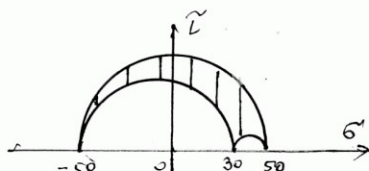
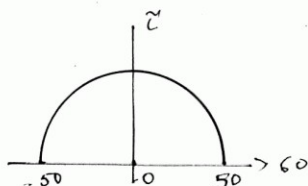
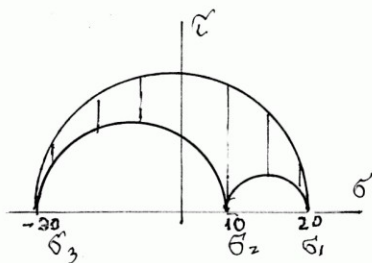


Вариант в)

Полная диаграмма напряженного состояния



Вариант с)



Глава 2 Деформированное состояние в точке нагруженного тела.

1. Линейные и угловые деформации

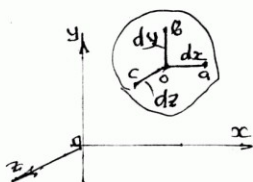
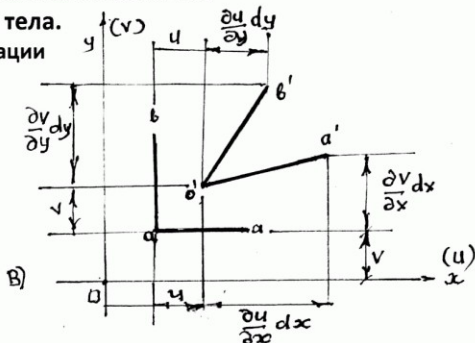


Рис.10

а)



На рис.10а изображено уравновешенное в пространстве тело, в котором выделены три взаимно перпендикулярных элементарных отрезка. На рис.10в показаны перемещения и деформации элементарных отрезков в плоскости ХУ.

Под воздействием внешней нагрузки тело (рис.10) деформируется, т.е. его точки перемещаются.

Перемещение вдоль оси Х – обозначается u , вдоль оси У – v , вдоль оси Z – w .

Рассмотрим деформированное состояние отрезков oa и ob и угла между ними (рис.10в).

Приращение длины отрезка oa вдоль оси Х равно $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, где $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; – относительное

удлинение отрезка oa , или деформация вдоль оси Х. Аналогично – $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$;

угол поворота отрезка oa в плоскости ХУ равен $\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$, угол поворота отрезка ob в этой же плоскости равен $\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Угловая деформация или угол сдвига в плоскости ХУ равен $\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$;

Таким образом, деформированное состояние в точке нагруженного тела определяется 6-ю компонентами деформированного состояния.

Главные деформации определяются из уравнения (8), коэффициенты которого, являются инвариантами деформированного состояния.

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 - J_2 \varepsilon - J_3 = 0; \quad (8)$$

$$J_1 = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$$

$$J_2 = -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{1}{4} \gamma_{xy} + \frac{1}{4} \gamma_{yz} + \frac{1}{4} \gamma_{zx}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

2. Обобщенный закон Гука.

Поскольку нормальные напряжения вызывают изменение линейных размеров, на которых касательные напряжения не совершают работу, так же как нормальные напряжения не совершают работу на угловых деформациях, то линейные деформации не зависят от касательных напряжений, а угловые – от нормальных.

Таким образом, в случае сложного напряженного состояния обобщенный закон Гука описывается приведенными ниже зависимостями (9)

Линейные деформации вдоль осей X, Y, Z; Угловые деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_z - \sigma_y)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z - \sigma_x)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x - \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G};\end{aligned}\quad (9)$$

Где ν - коэффициент Пуассона.

Объемная деформация $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ (9а)

3. Удельная потенциальная энергия.

Элементарная нормальная сила вдоль оси X - $\sigma_x dx dy$ совершает работу на элементарном перемещении вдоль оси X - $\varepsilon_x dz$; т.е. $(\frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dv)$, где dv - элементарный объем. Элементарная касательная сила - $\tau_{xy} dy dx$ совершает работу на элементарном перемещении - $\gamma_{xy} dz$ т.е. $(\frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dv)$;

Таким образом, потенциальная энергия, накопленная в элементарном объеме, равна работе элементарных сил на элементарных перемещениях.

$$dU = \frac{1}{2} dv (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx});$$

Удельная потенциальная энергия равна $U_0 = \frac{dU}{dv}$;

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] \quad (10)$$

4. Удельная потенциальная энергия изменения объема и формы.

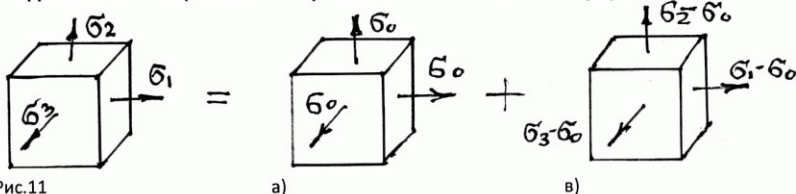


Рис.11

Разложим напряженное состояние (Рис.11) на две составляющие, где а) отвечает за изменение объема, в) - за изменение формы.

Полная удельная потенциальная энергия равна сумме удельных потенциальных энергий изменения объема $U_{0,об}$ и формы $U_{0,ф}$

$$U_0 = U_{0,об} + U_{0,ф} \quad \text{где} \quad U_0 = \frac{1}{2E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]; \quad (11)$$

Т.к. в напряженном состоянии (рис.11 а) все нормальные напряжения равны σ_0 , его удельная потенциальная энергия будет равна

$$U_{0,об} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_0^2 \quad (12)$$

Из условия равенства нулю изменения объема в напряженном состоянии (Рис.11в), следует, что сумма главных напряжений равна нулю $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$; где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Сложив выражения для деформаций, получим значение напряжения σ_o

$$\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (13)$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема (12) после подстановки σ_o примет

$$\text{вид} \quad U_o = \frac{(1-2\nu)}{6E}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]^2 \quad (14)$$

Вычитая из уравнения (11) уравнение (14) получим значение удельной потенциальной энергии изменения формы 15.1. Умножив и поделив это выражение на 2, получим окончательный вариант формулы для определения потенциальной энергии изменения формы (15.2).

$$\begin{aligned} 1. \quad U_{o\phi} &= \frac{(1+\nu)}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] \times \frac{2}{2} \\ 2. \quad U_{o\phi} &= \frac{(1+\nu)}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (15)$$

Для произвольных осей удельная потенциальная энергия изменения формы имеет вид

$$U_{o\phi} = \frac{(1+\nu)}{6E}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2); \quad (16)$$

Глава 3 Теории предельных напряженных состояний.

1. Критерии пластичности и разрушения.

Материал элементов конструкции в зависимости от условий нагружения может находиться в различных механических состояниях. При малых нагрузках он сохраняет упругие свойства. При более высоком уровне внешнего воздействия возникают необратимые изменения размеров и формы элементов конструкции, т.е. материал находится в пластическом состоянии. При дальнейшем увеличении внешней нагрузки, происходит образование трещин и разрушение. Такая последовательность механических состояний характерна для испытаний стальных образцов на растяжение.

Многочисленные исследования свойств машиностроительных материалов показали, что не маловажную роль играет характер напряженного состояния возникающего при испытаниях. Например, чугун – хрупкий материал, при большом трехстороннем сжатии ведет себя как пластичный.

Физические процессы, протекающие в материале при пограничных состояниях различны, хотя и взаимосвязаны и задача расчета элементов конструкций на прочность, по сути, сводится к выработке критерия пластичности и критерия разрушения. Наиболее разработанным и простым является критерий пластичности. Критерием пластичности при испытаниях при простом нагружении (растяжении, кручении, изгибе) является равенство наибольшего напряжения в элементе конструкции пределу текучести материала, из которого он изготовлен. Запас прочности равен отношению предела текучести к максимальному рабочему напряжению.

Запасом прочности для сложного напряженного состояния условно можно считать число n , которое показывает во сколько раз компоненты заданного напряженного состояния меньше компонентов подобного ему предельного состояния. Предельным является состояние, при котором начинаются либо пластические деформации, либо разрушение.

Этот подход настолько сложен с точки зрения практики, что при расчете элементов конструкций на прочность в случае сложного напряженного состояния, его заменяют эквивалентным одноосным растяжением, равным ему по опасности (рис.12).

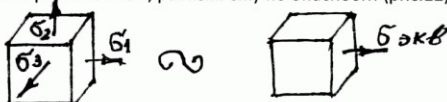


Рис.12

Эквивалентным напряжением называется напряжение растяжения, при котором заданное и эквивалентное напряженные состояния равноопасны.

Таким образом, в случае сложного напряженного состояния, запасом прочности является отношение предела текучести материала при растяжении к эквивалентному

$$\text{напряжению. } n_T = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{ЭКВ}};$$

Естественно, возникает проблема перехода от сложного напряженного состояния к эквивалентному растяжению. В основу перехода от заданного напряженного состояния к эквивалентному растяжению положены некоторые правдоподобные гипотезы, которые подтверждены и многочисленными экспериментами и инженерной практикой. В настоящее время чаще всего используют следующие теории предельных напряженных состояний, основанные на описываемых ниже гипотезах.

Наиболее часто используемой гипотезой является гипотеза пластичности, которая основывается на предпосылке, что пластические деформации являются результатом необратимых сдвигов в кристаллической решетке пластичных материалов.

1) Теория наибольших касательных напряжений,

(Треска-Сен-Венана)

Два напряженных состояния равно опасны, если равны их наибольшие касательные напряжения..

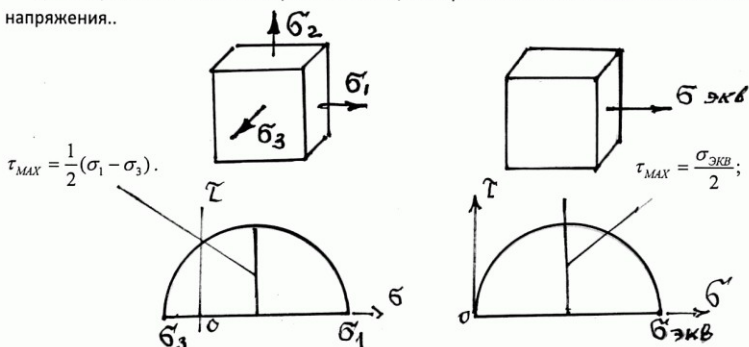


Рис.13

На рис.13 изображены заданное и эквивалентное напряженные состояния.

Из равенства наибольших касательных напряжений следует, что по теории наибольших касательных напряжений $\sigma_{ЭКВ} = \sigma_1 - \sigma_3$;

2) Теория энергии формоизменения или энергетическая теория (Хубера – Мизеса)

В качестве критерия равной опасности принято равенство энергий формоизменения. Для заданного напряженного состояния удельная энергия формоизменения равна

$$U_{о.ф.} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Для эквивалентного напряженного состояния $U_{о.ф.} = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_{ЭКВ}^2$

Из условия равенства эквивалентных напряжений для обоих напряженных состояний получим выражение для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{ЭКВ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (18)$$

Примечание: Поскольку энергетическая теория (18) в отличие от теории наибольших касательных напряжений (17) при определении эквивалентного напряжения учитывает значение второго главного напряжения, то ее использование при расчетах на прочность дает результат более близкий к экспериментальному, что подтверждается практикой. Результат расчетов по теории наибольших касательных напряжений – несколько завышен. Обе теории могут быть использованы, согласно заложенному в них критерию, только для пластичных материалов.

3) Теория Мора и ее применение.

Используя экспериментальные данные исследования механических свойств материалов, построим диаграмму Мора для трех пограничных состояний при растяжении, сжатии и кручении (Рис.14.а). Кривая, касательная к этим окружностям, называется предельной огибающей и является такой же механической характеристикой как, например, диаграмма растяжения,

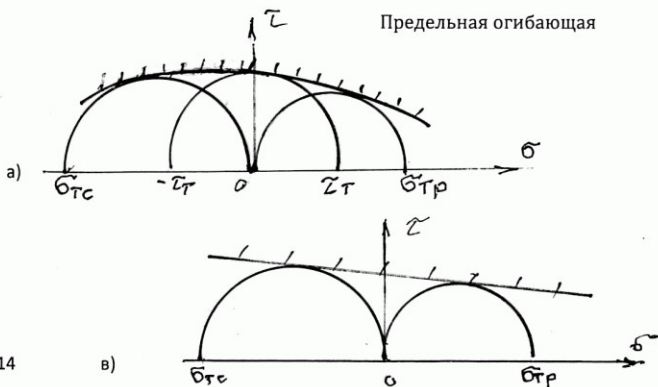
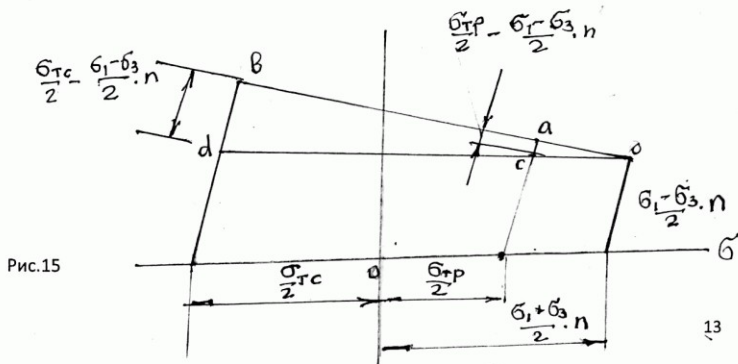
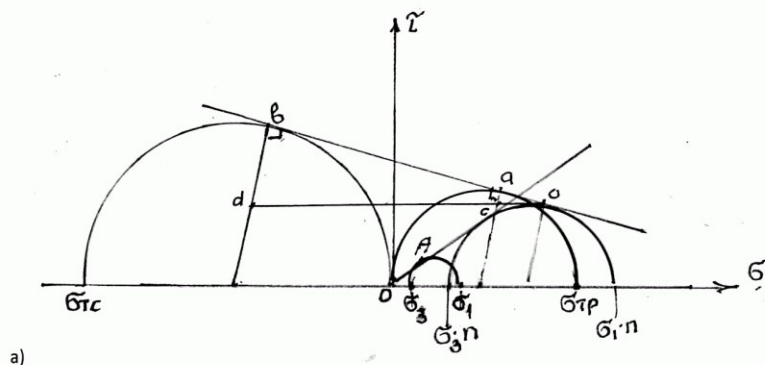


Рис.14

в)

Примечание: Вариант (рис.14в) может быть получен при ограниченном количестве данных о свойствах материала.

Ниже, на диаграмме рис.15а, построенной по варианту рис.14в, изображен наибольший круг Мора для заданного напряженного состояния, и прямая ОА, касательная к этому кругу. Прямая ОА является геометрическим местом точек, соответствующих напряженным состояниям, подобным заданному, т.е. напряженным состояниям у которых все компоненты напряженного состояния пропорциональны одной и той же величине n . Далее, проведена окружность, касательная к прямой ОА, и к предельной огибающей. Эта окружность соответствует пограничному состоянию для заданного напряженного состояния, компоненты которого в n раз больше заданных значений наибольшего и наименьшего главных напряжений. Очевидно, что n является коэффициентом запаса прочности для заданного напряженного состояния.



Из подобия треугольников **аос** и **вод** (рис.15в) следует соотношение их сторон

$$\frac{l_{oc}}{l_{od}} = \frac{l_{ac}}{l_{bd}}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} l_{oc} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} n - \frac{\sigma_{TP}}{2}; & l_{od} &= \frac{\sigma_{TC}}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} n; \\ l_{ac} &= \frac{\sigma_{TP}}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} n; & l_{bd} &= \frac{\sigma_{TC}}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} n; \end{aligned} \quad (20)$$

Подставив значения длин отрезков (20) в соотношение (19) получим выражение для запаса прочности n .

$$n_T = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{TC}} \sigma_3}; \quad \text{где } \sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_{эKB}; \quad k = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{TC}};$$

Пример 3.

Для пространственной рамы, изображенной на рис.16, прямоугольного поперечного сечения построить эпюры изгибающих и крутящих моментов, определить размер поперечного сечения «а» и подобрать равнопрочное тонкостенное круглое сечение.

Дано: $F=3 \text{ кН}$; $l=1 \text{ м}$; $[\sigma]_p=80 \text{ МПа}$;

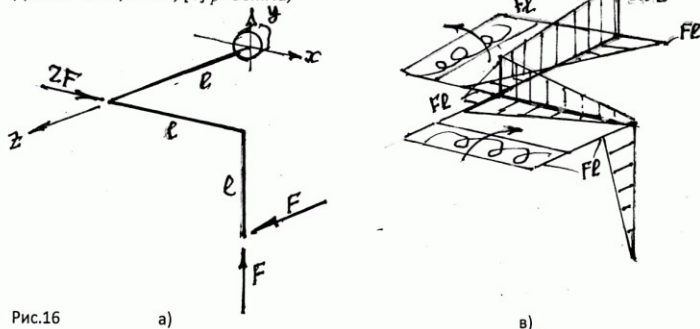


Рис.16

На рис.16 изображено: заданная рама, поперечные сечения (рис.16а) и эпюры моментов от заданной нагрузки (рис.16в).

Для наглядности, построим эпюры моментов от каждой силы отдельно (рис.17 а,в,с), сложив которые, получим суммарную эпюру изгибающих и крутящих моментов (рис.16в)..

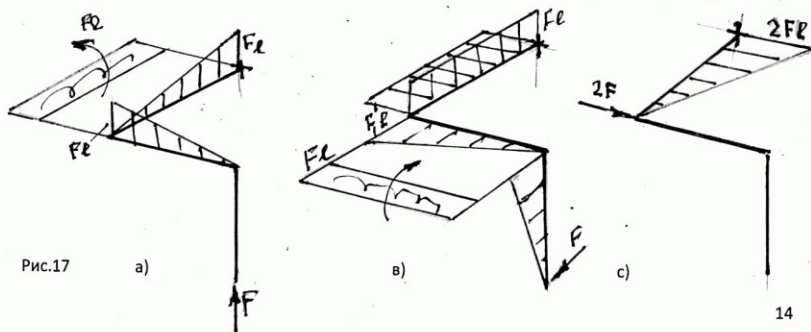


Рис.17

Очевидно, что самым нагруженным является сечение у заделки.

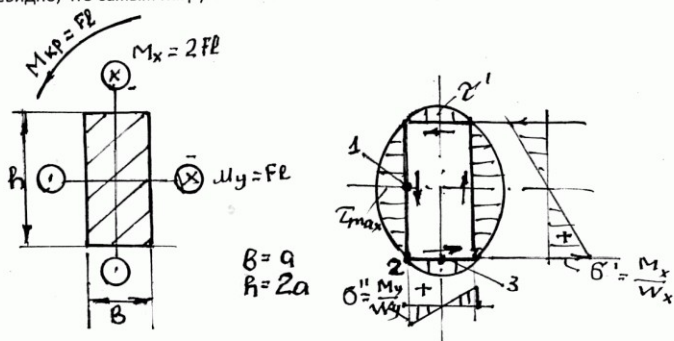


Рис.18

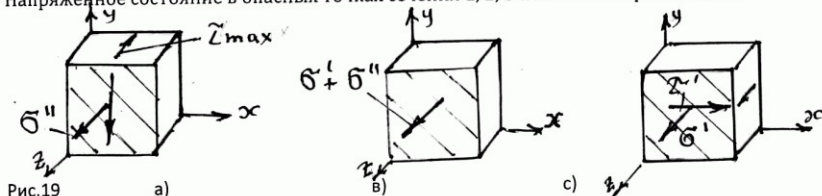
На рис.18 приведена расчетная схема опасного сечения и эпюры напряжений от внутренних силовых факторов.

Определение максимального значения напряжений.

$$\sigma' = \frac{M_x}{W_x} = \frac{2Fl}{bh^2} = \frac{6Fl}{a^3}; \quad \sigma'' = \frac{M_y}{W_y} = \frac{Fl}{hb^2} = \frac{3Fl}{2a^3}; \quad \tau_{MAX} = \frac{M_{KP}}{W_{KP}} = \frac{Fl}{0,246 \cdot 2a^3} = \frac{2Fl}{a^3};$$

$$\tau' = 0,795 \cdot \tau_{MAX} = \frac{1,6Fl}{a^3};$$

Напряженное состояние в опасных точках сечения 1, 2, 3 показано на рис.19 а, в, с.



$$\text{Напряженное состояние в т.2 одноосное и } \sigma_{ЭKB} = \sigma' + \sigma'' = \frac{15 Fl}{2 a^3}$$

Напряженные состояния в т.т. 1 и 3 называются плоско - упрощенными и для удобства расчета на прочность для пластичных материалов ниже приведены формулы для определения эквивалентного напряжения, минуя определение главных напряжений.

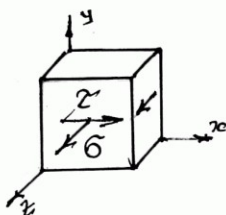


Рис.20

Примечание:

Плоско упрощенным напряженным состоянием называется плоское напряженное состояние, у которого отсутствует одно из двух нормальных напряжений в главных площадках..

Для изображенного на рис. 20 плоско упрощенного напряженного состояния главные напряжения определяются по формуле (7) стр.6.

$$\sigma = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Главные напряжения в порядке алгебраического убывания равны

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

по теории наибольших касательных напряжений будет равно Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{ЭКВ} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (21a)$$

По энергетической теории

$$\sigma_{ЭКВ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}; \quad (21b)$$

Эквивалентное напряжение в т.1 опаснее напряженного состояния в т.3, т.к. и σ и τ меньше чем в т.1

Эквивалентное напряжение в т.1 равно

$$\sigma_{ЭКВ} = \frac{Fl}{a^3} \sqrt{6^2 + 4.2^2} = 7,2 \frac{Fl}{a^3};$$

Для сравнения, вычислим эквивалентное напряжение по энергетической теории

$$\sigma_{ЭКВ} = \frac{Fl}{a^3} \sqrt{6^2 + 3.4} = 6,93 \frac{Fl}{a^3};$$

Размер заданного сечения определяется из условия прочности $\sigma_{ЭКВ} = [\sigma]_p$

$$a = \frac{7,2 Fl}{[\sigma]} = \sqrt[3]{\frac{7,2 \cdot 3000 \cdot 1000}{80}} = 65 \text{ мм};$$

Подбор равнопрочного сечения. Условие равнопрочности.

При подборе равнопрочных сечений для элементов конструкций используется условие равенства их запасов прочности, т.е. $n_i = n_j$; $\left(\frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{ЭКВ}}\right)_i = \left(\frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{ЭКВ}}\right)_j$; Это и есть условие

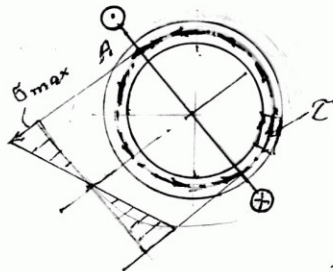
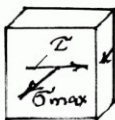
равнопрочности. При равенстве пределов текучести, т.е. материал элементов конструкции один и тот же, задача подбора равнопрочного поперечного сводится к равенству эквивалентных напряжений при одной и той же схеме нагружения..



Рис.21

а)

$$\frac{D}{\delta} = 10;$$



На рис.21а изображена расчетная схема нагружения сечения, на рис.21в – эпюры напряжений и напряженное состояние в опасной точке сечения.

Т.к. брус круглого поперечного сечения на косой изгиб « не работает », то нормальные напряжения вычисляются как отношение геометрической суммы изгибающих моментов в поперечном сечении к моменту сопротивления изгибу:

$$\sigma = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{w_x} = \frac{Fl\sqrt{5}}{\pi D^3 \delta} = \frac{40\sqrt{5}Fl}{\pi D^3}; \quad \tau = \frac{M_{кр}}{w_{кр}} = \frac{Fl}{\pi D^2 \delta} = \frac{20Fl}{\pi D^3};$$

Эквивалентное напряжение для равнопрочного сечения по теории наибольших касательных напряжений равно

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{Fl}{\pi D^3} \sqrt{8000 + 4.400} = \frac{98Fl}{\pi D^3}$$

Из равенства эквивалентных напряжений получим искомый размер.

$$D = a^3 \sqrt{\frac{98}{\pi 7,2}} = 1,63 \text{ а};$$

Пример.4

Сравнить эквивалентные напряжения для напряженных состояний, приведенных на рис.22.а, в, с. Эквивалентные напряжения вычислить по энергетической теории.

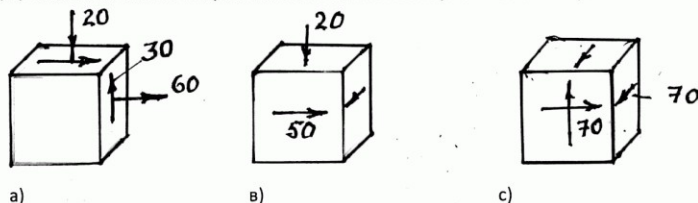


Рис.22 а)

в)

с)

Примечание Напряжения указаны в МПа.

Для вариантов а) и в), имеющие одну площадку текучести главные напряжения

определяются по формуле $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$; где x и y индексы неглавных площадок.

Точка рис.22 а - главные напряжения $\sigma = \frac{+60 - 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 + 20}{2}\right)^2 + 30^2} = 20 \pm 50$;

Главные напряжения равны $\sigma_1 = 70 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -30 \text{ МПа}$;

Эквивалентное напряжение по энергетической теории для всех вариантов равно

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]};$$

Для первого варианта $\sigma_{RD} = \sqrt{\frac{1}{2}[(70 - 0)^2 + (0 + 30)^2 + (-30 - 70)^2]} = 89 \text{ МПа}$;

Главные напряжения равны $\sigma_1 = 50 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = -20$; $\sigma_3 = -50$;

$$\text{Эквивалентное напряжение } \sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(50+20)^2 + (-20+50)^2 + (-50-50)^2]} = 89 \text{ МПа}$$

Примечание: первые два напряженных состояния равноопасны, равны их эквивалентные напряжения. Т.к. в третьем напряженном состоянии отсутствуют главные площадки, главные напряжения определяются как корни кубического уравнения (3а) стр.3

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 - J_2 \sigma - J_3 = 0;$$

$$J_1 = 0; \quad J_2 = +2\tau^2; \quad J_3 = 0; \quad \sigma^3 - 2\tau^2 = 0;$$

$$\text{Главные напряжения равны } \sigma = \sqrt{2}\tau = 70 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\sqrt{2}\tau = -70 \text{ МПа};$$

Плоское напряженное состояние, у которого наибольшее и наименьшее главные напряжения равны и противоположны по знаку, называется чистым сдвигом.

Эквивалентное напряжение в третьем случае равно

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(70-0)^2 + (0+70)^2 + (-70-70)^2]} = 154 \text{ МПа};$$

Наиболее опасным является третье напряженное состояние, т.к. его эквивалентное напряжение больше остальных.

Глава 4. Расчет на прочность осесимметричных оболочек.

1. Определение напряжений в тонкостенной оболочке по безмоментной теории.

Осесимметричными оболочками называются оболочки, срединная поверхность которых представляет собой поверхность вращения. Форма оболочки определяется формой срединной поверхности (сфера, конус, цилиндр и т.д.).

Далее рассматриваются задачи для оболочек с постоянной толщиной стенок. Предполагается так же, что внешняя нагрузка симметрична относительно оси симметрии оболочки. Отсутствие симметрии существенно осложняет задачу расчета оболочки.

Из симметричности формы оболочки и нагрузки вытекает, что в процессе деформации оболочки изгиб отсутствует. Теория расчета таких оболочек называется безмоментной теорией.

На рис.23 изображена симметричная тонкостенная оболочка, нагруженная внутренним давлением (рис. 23 а), и расчетная схема нагружения элемента оболочки, находящегося в равновесии.

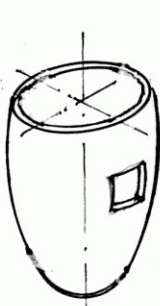
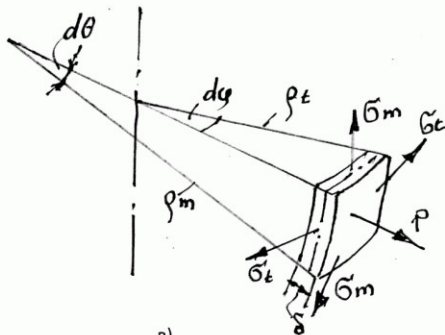


Рис.23

а)



б)

Сумма проекций сил на нормаль ν равна нулю.

$$p \rho_m d\theta \rho_i d\phi = 2\sigma_m \delta \rho_i \frac{d\theta}{2} + 2\sigma_i \delta \rho_m \frac{d\phi}{2};$$

Поделив на $d\phi$, $d\theta$, δ , получим зависимость, носящую название - уравнение Лапласа

$$\frac{p}{\delta} = \frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_i}{\rho_i}; \quad (22)$$

Примечание: При выводе уравнения Лапласа, в связи с тем, что нагрузка и форма оболочки симметричны и изгиб отсутствует и рассматривается деформация срединной поверхности. Учитывая тот факт, что толщина стенки оболочки существенно меньше габаритных размеров было принято, что напряжения равномерно распределены по толщине.

Решение задач с использованием уравнения Лапласа

Пример 5

Определить запас прочности длинной тонкостенной цилиндрической оболочки с днищами, нагруженной внешним и внутренним давлением, продольной силой и крутящим моментом, как показано на рис.24.

$$p_1 = 30 \text{ МПа}; p_2 = 20 \text{ МПа}; F = 10 \text{ кН}; M_{кр} = 300 \text{ кНм}; D = 40 \text{ мм}^2; \frac{D}{\delta} = 10; \sigma_{тр} = 420 \text{ МПа};$$

Решение задачи

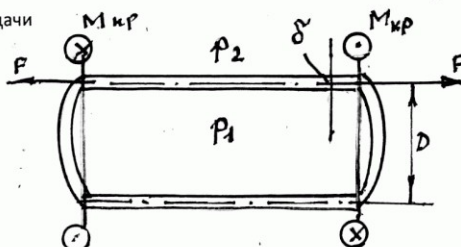
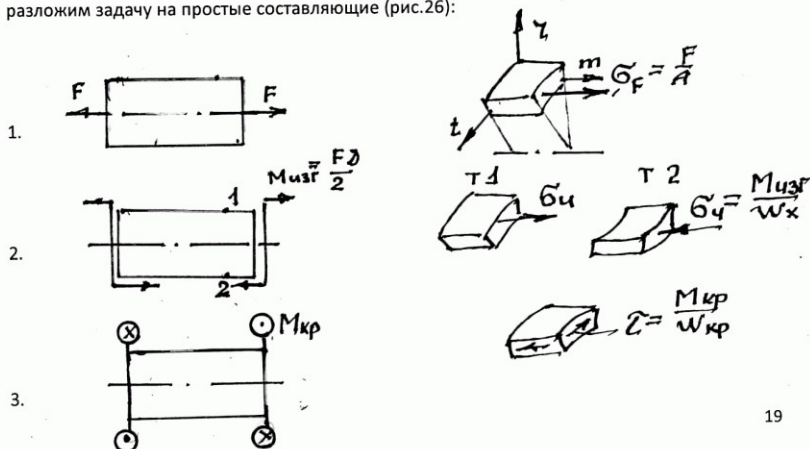


Рис.24

В пределах упругих деформаций, используя принцип независимого действия сил, разложим задачу на простые составляющие (рис.26):



4.
$$\boxed{P_1} = \boxed{P_1 - P_2} + \boxed{P_2}$$

4.

Рис.25

Определение напряжений

$$\sigma_F = \frac{F}{\pi D \delta} = 20 \text{ МПа}; \quad \sigma_{изг} = \frac{F \frac{D}{2}}{\pi D^2 \delta \frac{4}{4}} = 39,8 \text{ МПа} \quad \tau = \frac{M_{кр}}{\pi D^2 \delta \frac{2}{2}} = 31,4 \text{ МПа};$$

Для всех оболочек описанных вращением прямой, у которых $\rho_m = \infty$, окружное напряжение равно $\sigma_t = \frac{p D_t}{\delta}$. Меридиональное напряжение определяется из равновесия отсеченного фрагмента оболочки. Для заданной цилиндрической оболочки, у которой внутреннее давление равно $p = p_1 - p_2 = 10 \text{ МПа}$

$$\sigma_t = \frac{p D}{2 \delta} = 50 \text{ МПа};$$

σ_m определяется из условия равенства нулю суммы проекций продольных сил, приложенных к отсеченному фрагменту оболочки

$$\sigma_m \pi D \delta = p \frac{\pi D^2}{4}; \quad \sigma_m = \frac{p D}{4 \delta} = 25 \text{ МПа};$$

Напряженное состояние в опасных точках оболочки показано на (рис.26 а, в)

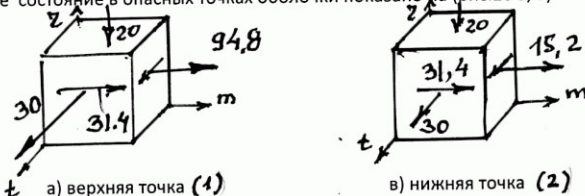


Рис.26

Главные напряжения для варианта а)

$$\sigma = \frac{94,8 + 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{94,8 - 30}{2}\right)^2 + 31,4^2} = 62,4 \pm 45,2;$$

$$\sigma_1 = 107,6 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 17,2 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -20 \text{ МПа}; \quad \sigma_{ЭKB} = \sigma_1 - \sigma_3 = 127,6 \text{ МПа}$$

$$\text{Запас прочности равен } n_T = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{ЭKB}} = 3,3;$$

Примечание: нижняя точка менее опасна.

Пример 6

Для тонкостенной цилиндрической оболочки (рис. 27) определить допускаемое значение давления, если задано: давление p , $M_{KP} = 4\pi D^2 \delta$; $\frac{D}{\delta} = 10$; $[\sigma]$;

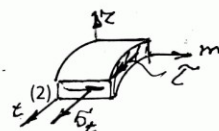
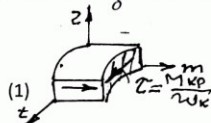
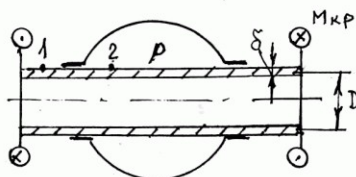


Рис. 27

а)

в)

На рис. 27а приведена расчетная схема нагружения тонкостенной цилиндрической оболочки, проходящей через камеру с давлением. На рис. 27в изображены напряженные состояния в наружной (1) и внутренней (2) точке оболочки.

Определение главных напряжений

Точка 1. $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$;

$$\sigma_{RD} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3}\tau = 14,8p$$

Точка 2. Плоско упрощенное напряженное состояние.

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta} = 5p; \quad \tau = \frac{M_{KP}}{W_{KP}} = \frac{4\pi D^2 \delta}{\frac{\pi D^2 \delta^3}{2}} = 8p; \quad \sigma_{ЭКВ} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 9,85p$$

Из условия прочности определяем допускаемое значение давления.

$$\sigma_{ЭКВ} = [\sigma]_p \quad [p] = \frac{[\sigma]}{14,8};$$

Пример 7

Для запаянной тонкостенной оболочки, показанной на рис. 28, построить эпюры окружных и меридиональных напряжений, возникающих под действием внутреннего давления.

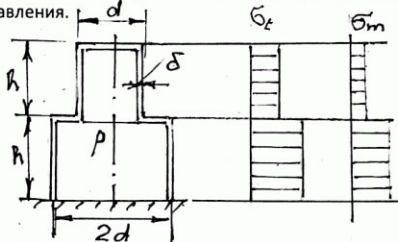
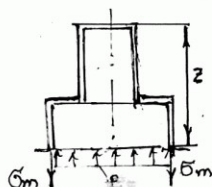


Рис. 28.

а)



в)

На рис.28 изображены: на рис.28а – оболочка и эпюры распределения напряжений σ_m и σ_t на рис.28в – равновесное состояние отсеченных частей оболочки.

Из уравнения Лапласа, с учетом равенства радиуса кривизны образующей цилиндра $\rho_m = \infty$, окружное напряжение по всей высоте оболочки, учитывая, что диаметры срединной поверхности оболочки отличаются вдвое равно $\sigma_t = \frac{p\rho_t}{\delta} = \frac{pD_t}{2\delta}$;

Меридиональные напряжения определяются из условия равновесия отсеченных частей оболочки: сумма проекций сил на вертикальную ось равна нулю

$$\sum F_z = 0; \quad \frac{p\pi D_t^2}{4} = \sigma_m \pi D_t \delta; \quad \sigma_m = \frac{pD_t}{4\delta};$$

Эпюры напряжений на рис.28а построены с учетом значений D_t по участкам.

Пример 8

Для оболочки (рис.29), аналогичной оболочке в примере 7, но наполненной жидкостью с удельным весом γ построить эпюры окружных и меридиональных напряжений.

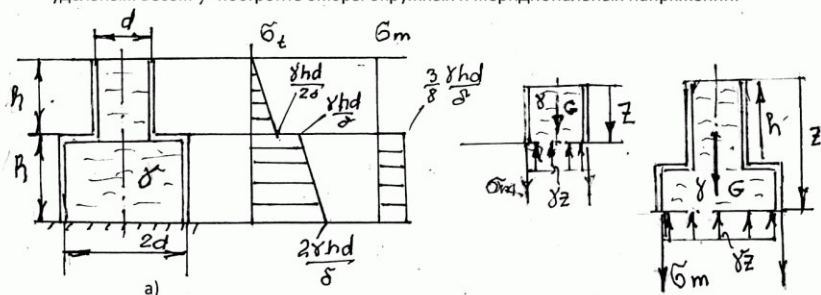


Рис.29

в)

На рис.29 изображены: оболочка, наполненная жидкостью, и эпюры σ_m и σ_t (рис.29 а), на рис.29в – равновесное состояние отсеченных частей оболочки.

Окружные и радиальные напряжения определяются аналогично примеру 7.

$$\sigma_t = \frac{p\rho_t}{\delta} = \frac{\gamma z D_t}{2\delta} \quad \text{где } p = \gamma \cdot z;$$

Подставляя значения z на границах участков (1) и (2) и D_t – диаметры поперечного сечения этих участков, построим эпюры распределения окружных напряжений по высоте оболочки.

Меридиональные напряжения σ_m определяются из равновесия отсеченных частей оболочки, у которых сумма сил на вертикальную ось равна нулю.

Эпюра меридиональных напряжений построена с учетом того, что гидростатическое давление переменено по высоте оболочки, поэтому на схеме равновесного состояния

отсеченных частей оболочки, в текущем сечении изображена вертикальная составляющая давления $p = \gamma \cdot z$;

На первом участке из равновесия верхнего участка, где G - вес объема жидкости, получим $\sigma_m = 0$; . На втором участке, из равенства нулю суммы проекций сил на вертикальную ось следует, что

$$\sigma_m 2\pi \cdot d \cdot \delta = \gamma \left[h \frac{\pi \cdot d^2}{4} = (z - h) \pi \cdot d^2 - z \pi \cdot d^2 \right]; \quad \sigma_m = \frac{3}{8} \frac{\gamma h d}{\delta};$$

Пример 9

Для конической оболочки (рис.30), наполненной жидкостью с удельным весом γ , построить эпюры σ_m и σ_t

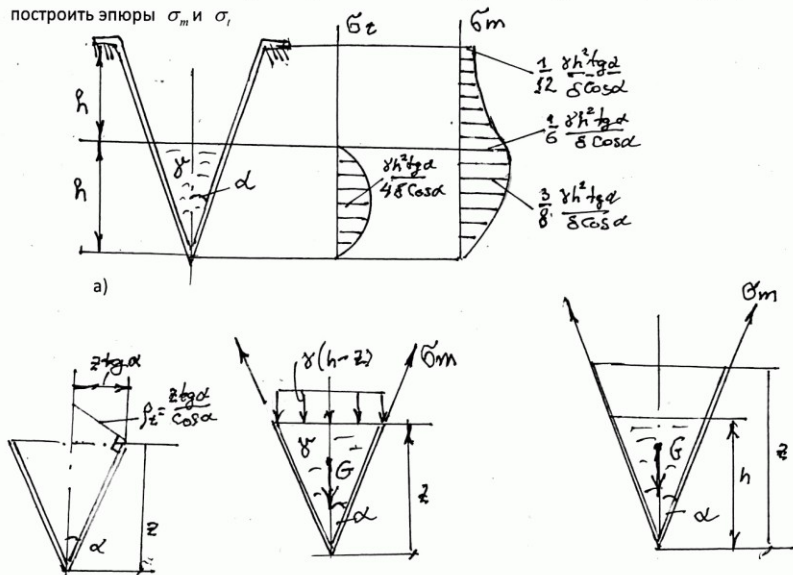


Рис.30

в)

На рис.30а, изображены: коническая оболочка, до половины наполненная жидкостью, и эпюры окружных и меридиональных напряжений.

На рис.30в показано равновесное состояние отсеченных частей оболочки
Определение окружных напряжений.

$$\text{Участок (1). } 0 \leq z \leq h; \quad \sigma_t = \frac{p \rho_t}{\delta}; \quad \rho_t = \frac{z \tan \alpha}{\cos \alpha}; \quad p = \gamma(h - z);$$

Подставив значения ρ_t и p , в выражение для σ_t получим

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h - z) z \tan \alpha}{\delta \cos \alpha}; \quad - \text{ это уравнение параболы с экстремумом посередине.}$$

$$z_{\text{ЭК}} = \frac{h}{2}; \quad (\sigma_t)_{\text{MAX}} = \frac{\gamma h^2 \tan \alpha}{4 \delta \cos \alpha};$$

Т.к. сумма проекций сил на вертикальную ось равна нулю, то выражение для распределения меридиональных напряжений на первом участке примет вид

$$\sigma_m \pi z \operatorname{tg} \alpha \delta \cos \alpha = \gamma (h - z) \pi z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{3} \gamma \pi z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad \sigma_m = \frac{\gamma (h - \frac{2}{3} z) z \operatorname{tg} \alpha}{2 \delta \cos \alpha};$$

Это уравнение параболы с экстремумом в сечении $z = \frac{3}{4} h$;

Участок (2) $h \leq z \leq 2h$; $\sigma_r = 0$, т.к. $p = 0$;

Из уравнения равновесия ($\sum F_z = 0$) получим выражение для определения σ_m

$$\sigma_m \pi 2z \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \gamma \frac{1}{3} h \pi (h \operatorname{tg} \alpha)^2; \quad \sigma_m = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{6 \delta \cos \alpha z}; \quad h \leq z \leq 2h;$$

2. Расчет на прочность толстостенных труб, нагруженных внешним и внутренним давлением. (Задача Ламе)

Задача определения напряжений в толстостенной трубе (рис.31а), нагруженной внешним и внутренним давлением, является задачей статически неопределимой, поэтому для ее решения необходимо помимо условий равновесия, иметь и закон распределения деформаций по толщине трубы.

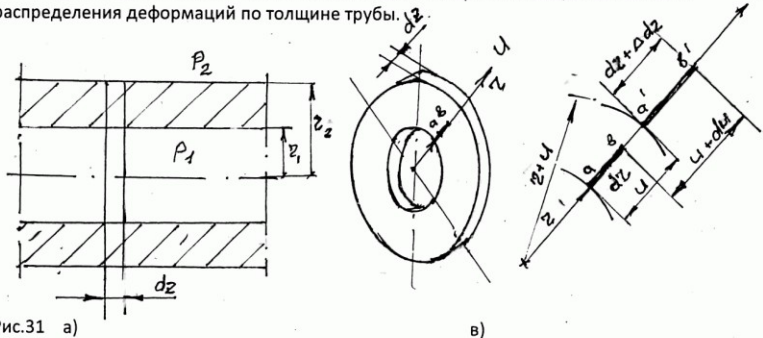


Рис.31 а)

в)

Т.к. форма оболочки и нагрузка симметричны относительно ее оси, то перемещение точек в поперечном сечении трубы происходит вдоль радиуса (рис.31в).

За положительное направление перемещений по радиусу выберем перемещение вдоль оси U , как показано на рис. 31в. В процессе деформирования трубы, текущий радиус r получит приращение длины $(r + u)$.

Окружная деформация определяется отношением разности между длинами окружностей радиуса $(r + u)$ и радиуса (r) к ее первоначальному значению.

$$\varepsilon_r = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r}; \quad \varepsilon_r = \frac{u}{r}; \quad (23).$$

Не трудно вычислить радиальную деформацию, т.к. перемещение точки b элементарного отрезка ab по радиусу на величину du , больше, чем смещение точки a . Радиальная деформация равна отношению приращения длины отрезка ab к его первоначальной длине - dr , (рис.31в)

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad (24)$$

Решая совместно уравнение (23) и (24), получим дифференциальное уравнение совместности деформаций (25) которое, после подстановки зависимостей деформаций от напряжений из обобщенного закона Гука, примет вид (26).

$$\frac{d(\varepsilon_r)}{dr} - \varepsilon_r = 0; \quad \varepsilon_r - \varepsilon_z + r \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \quad (25)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu\sigma_z]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu\sigma_r];$$

Получим $\sigma_r - \sigma_z + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0; \quad \frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_r = 0; \quad (26)$

Рассмотрим напряженное состояние, возникающее в точках поперечного сечения

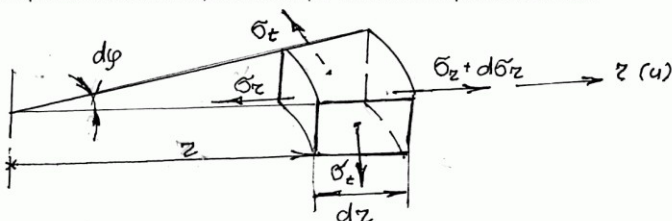


Рис.31с

Напряженное состояние в выделенном элементарном объеме изображено на (рис.31с), Составив сумму проекций сил на направление радиуса, получим дифференциальное уравнение равновесия выделенного элементарного объема (26)

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi dz - \sigma_r d\varphi dr - 2\sigma_z \frac{d\varphi}{2} dr = 0;$$

$$\sigma_r - \sigma_z - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0; \quad \frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_r = 0; \quad (27)$$

Складывая и вычитая уравнения (26) и (27), получим два уравнения, решая которые, определим закономерности распределения радиальных и окружных напряжений по поперечному сечению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}[r(\sigma_r + \sigma_z)] - (\sigma_r + \sigma_z) &= 0; \\ \frac{d}{dr}[r(\sigma_r - \sigma_z)] + (\sigma_r - \sigma_z) &= 0; \end{aligned} \quad \sigma_r + \sigma_z = 2A; \quad \sigma_r - \sigma_z = \frac{2B}{r^2}; \quad (28)$$

Окружные и радиальные напряжения равны $\sigma_r = A \pm \frac{B}{r^2}; \quad (29)$

A и B – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий

Примечание: при построении эпюр распределения напряжений по поперечному сечению трубы полезно учитывать, что уравнение (29) описывает гиперболу с асимптотой A и что напряжения, следовательно, в бесконечности стремятся к этой величине.

Граничные условия: $r = r_1; \quad \sigma_r = -p_1;$
 $r = r_2; \quad \sigma_r = -p_2;$

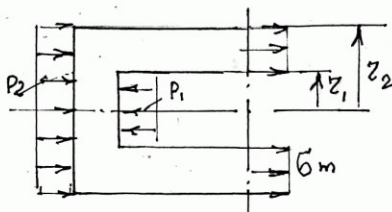
Подставляя граничные условия в формулу (29) определим значение констант A и B.

$$A = \frac{p_1 r_2^2 - p_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad B = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (30)$$

В итоге формула для определения окружных и радиальных напряжений примет вид

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \pm \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}; \quad (31)$$

Продольное напряжение σ_m , отличное от нуля в случае наличия днищ, определяется аналогично определению меридионального напряжения в тонкостенной оболочке, т.е. из условий равновесия отсеченной части трубы (рис.31д)



$$\sigma_m = A = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (29a)$$

Рис.31д

3. Определение радиальных перемещений в толстостенном цилиндре.

Радиальные перемещения согласно формуле (24) стр.25 $u = \varepsilon_r r$; где ε_r определяется из закона Гука с учетом значений напряжений из формулы (29)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_m)] = \frac{1}{E} \left[\left(A + \frac{B}{r^2} \right) - \nu \left(A - \frac{B}{r^2} \right) - \nu A \right];$$

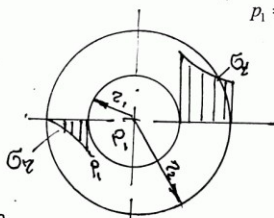
$$u = \frac{r}{E} [(1 + \nu)A - (1 - \nu) \frac{B}{r^2} - \nu(A)] \quad (32)$$

При отсутствии в трубе днищ, т.е. когда $\sigma_m = 0$; последнее слагаемое в формуле (32) также отсутствует.

4. Частные случаи нагружения толстостенной трубы.

1) Труба, нагруженная только внутренним давлением (рис.32)

$$p_1 = p; \quad p_2 = 0;$$



$$r = r_1; \quad \sigma_t = +p \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad \sigma_r = -p;$$

$$r = r_2; \quad \sigma_t = +p \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad \sigma_r = 0$$

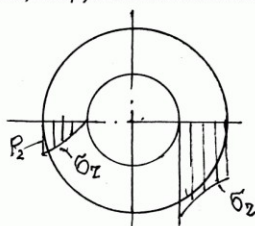
Рис.32

На рис. 32 изображено поперечное сечение толстостенной трубы без днищ, и эпюры окружных и радиальных напряжений, построенные с помощью формулы Ламе

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \pm \frac{p_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2};$$

Подставляя текущее значение радиуса r , построим эпюры напряжений (рис.32)

2) Труба, нагруженная только внешним давлением (рис.33)



$$p_1 = 0; p_2 = p;$$

$$r = r_1; \sigma_t = -p \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \sigma_r = 0;$$

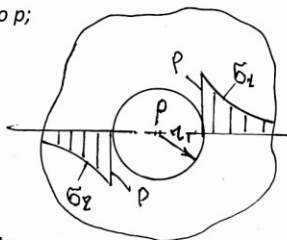
$$r = r_2; \sigma_t = -p \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \sigma_r = -p;$$

Рис.33

На рис.33 Изображено поперечное сечение трубы без дна и эпюры радиальных и окружных напряжений, полученных из формулы Ламе

$$\sigma_r = \frac{-p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p_2 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}$$

3) Бесконечная плита с цилиндрическим отверстием, давление в котором равно p ;



$$p_1 = p; p_2 = 0; r_2 = \infty;$$

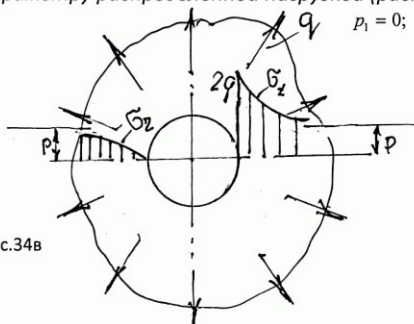
$$r = r; \sigma_t = p; \sigma_r = -p;$$

Рис.34а

На рис. 34а изображена плита и эпюры радиальных и окружных напряжений с помощью формулы Ламе. Т.к. Асимптота А равно нулю, то на периферии пластины напряжения стремятся к нулю.

$$p_2 = 0; r_2 = \infty; \sigma_t = \pm \frac{p r_1^2}{r^2};$$

4) бесконечная труба с цилиндрическим отверстием, растянутая по периметру распределенной нагрузкой (рис.34в)



$$p_1 = 0; p_2 = -q; r_2 = \infty;$$

Рис.34в

$$\sigma_z = -p_2 \mp p_2 \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \text{где: } p_2 = -q, \text{ а формула Ламе примет вид } \sigma_z = q \pm q \frac{r_1^2}{r^2}$$

Отверстие в растянутой плите является своего рода концентратором напряжений. Окружное напряжение в точках внутренней поверхности вдвое превышает напряжение, растягивающее плиту. На периферии оба напряжения выравниваются и стремятся к q .

6. Определение контактных напряжений в составных трубах.

В толстостенных трубах, нагруженных высоким внутренним давлением, величина которого выше предела текучести материала, из которого она изготовлена, приходится применять технологии, позволяющие увеличить прочность стенок трубы, не изменяя механических характеристик материала. Одним из конструктивных решений этой проблемы является создание составных труб, соединенных с натягом. При этом приеме, благодаря тому, что внешние размеры внутренней трубы несколько больше внутренних размеров наружной, во внутренней трубе создаются напряжения сжатия.

При эксплуатации такой трубы, сначала идет разгрузка внутренней трубы и в итоге, достигается более равномерное распределение напряжений по ее поперечному сечению.

Этот прием используется в технике высоких давлений, при изготовлении стволов мощных артиллерийских орудий и т.д.

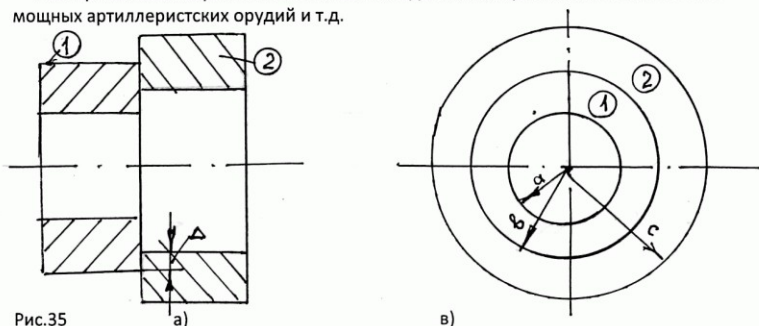


Рис.35

На рис.35а показаны две толстостенные трубы до сборки, у которых внешний радиус трубы (1) на Δ больше, чем внутренний радиус трубы (2). Сборка таких деталей (Рис.35в) в инженерной практике называется «посадкой с натягом».

Между двумя цилиндрами после сборки возникает контактное давление, и задача определения напряжений может рассматриваться как сумма двух частных случаев, рассмотренных ранее (рис.36)

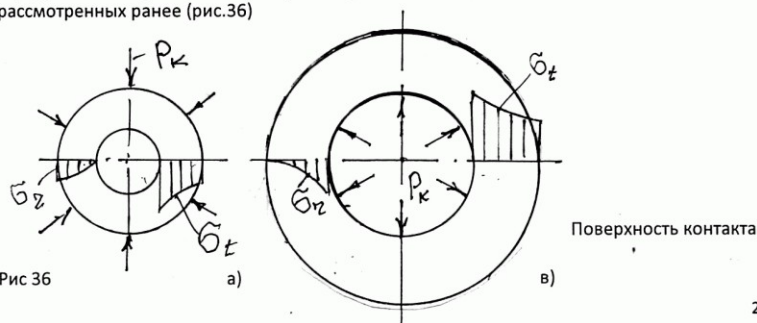


Рис 36

На рис.36 изображены: а) схема нагружения внутренней трубы и эпюры окружных и радиальных напряжений, соответствующий частному случаю 2), в) схема нагружения внешней трубы и эпюры окружных и радиальных напряжений, соответствующая частному случаю 1.

На рис 37 изображены: картина распределения контактных напряжений в составной трубе после сборки (рис.37а) и суммарная эпюра напряжений при нагрузке составной трубы внутренним давлением.

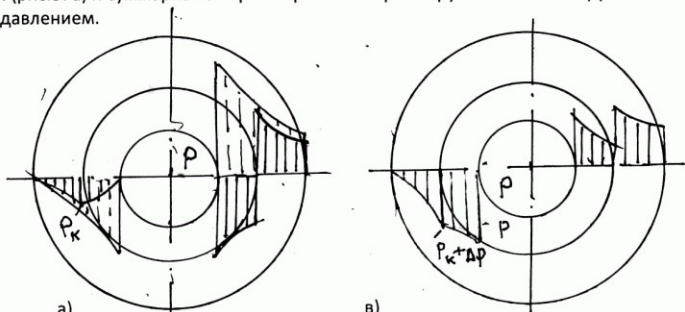


Рис.37

Примечание. Из анализа рис.37в становится очевидным, что сборка труб с натягом увеличивает запас прочности трубы, т.к. перераспределяет интенсивность напряжений, разгружая внутреннюю область и догружая менее нагруженную внешнюю.

Пример 10

Определить допускаемое значение крутящего момента $[M_{кр}]$ в толстостенной трубе (Рис.38), нагруженной равным внешним и внутренним давлением и крутящим моментом.

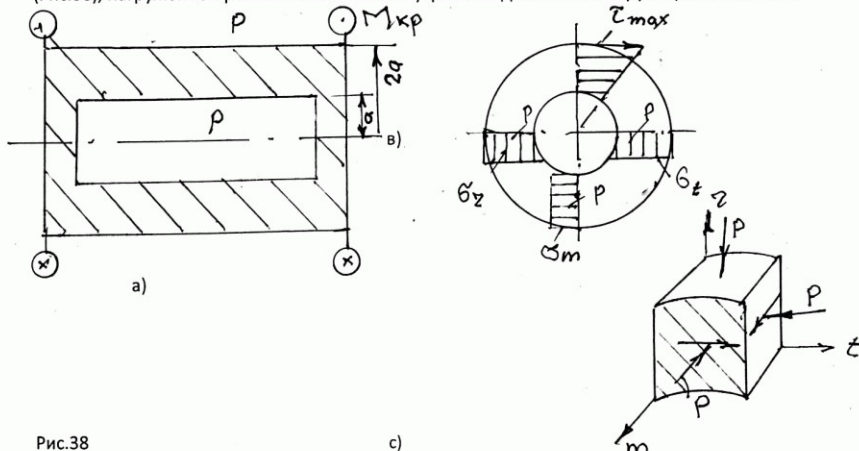


Рис.38

На рис. 38 а показана схема нагружения толстостенной трубы, на рис.38в изображены эпюры распределения напряжений по поперечному сечению и напряженное состояние в опасных точках поперечного сечения. Дано: $p_1 = p_2 = p$; $r_1 = a$; $r_2 = 2a$; $[\sigma]$;

Окружные и радиальные напряжения определим из формулы Ламе, после подстановки заданных значений параметров трубы

$$\sigma_r = \frac{pa^2 - p_2a^2}{3a^2} \pm \frac{(p - p_2)a^2}{3a^2} \frac{a^2}{r^2} = -p; \quad \sigma_m = -p; \quad \tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_{KP}} = 0,085 \frac{M_{KP}}{a^3};$$

$$W_{KP} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - C^4) = \frac{\pi 64a^3}{16} \frac{15}{16} = 11,78a^3;$$

где
Определение главных и эквивалентного напряжений

Т.к. одно главное напряжение известно $\sigma = -p$;

$$\text{Два других по формуле } \sigma_{UK} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \pm \tau_{\max};$$

Таким образом, главные напряжения равны

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = -p; \quad \sigma_3 = -\tau; \quad (\text{При условии, что } \tau_{\max}, \text{ существенно больше } p)$$

Эквивалентное напряжение по теории наибольших касательных напряжений равно

$$\sigma_{ЭКВ} = 2\tau = 2 \frac{0,085 M_{KP}}{a^3} = 0,17 \frac{M_{KP}}{a^3};$$

Допускаемое значение крутящего момента определяется из условия прочности

$$\sigma_{ЭКВ} = [\sigma]_p; \quad M_{KP} = \frac{[\sigma]_p a^3}{0,17} = 5,88[\sigma] a^3;$$

Пример 11

Для толстостенной трубы без дна (рис.39) определить допускаемое значение внешнего давления, если дано:

$$M_{KP} = p\pi D^3; \quad p_1 = 0; \quad p_2 = p; \quad r = a; \quad r_2 = 2a; \quad [\sigma] = 200 \text{ МПа};$$

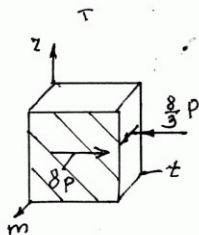
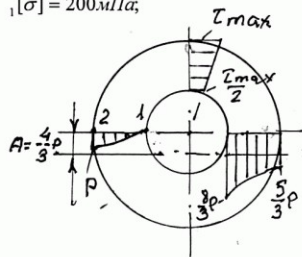
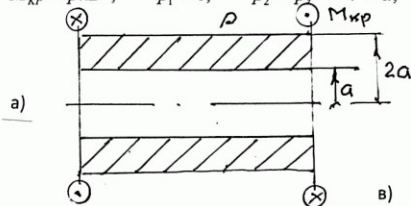


рис.39

На рис.39а приведена схема нагружения трубы, на рис.39б - эпюры распределения напряжений по поперечному сечению трубы, на рис.39в - напряженные состояния в опасных точках поперечного сечения.

Определение напряжений:

Касательные напряжения определяются также как в предыдущем примере

$$\tau_{MAX} = \frac{M_{KP}}{W_{KP}} = 16p; \text{ Окружные и радиальные напряжения по формуле Ламе}$$

$$\sigma_r = -\frac{4}{3}p \pm \frac{4}{3}p \frac{a^2}{r^2};$$

Определение эквивалентных напряжений

$$\text{Для внутренних точек (т.1)} \quad \sigma_{гд} = -\frac{4}{3}p \pm p \sqrt{\frac{16}{9} + 64} = -\frac{4}{3}p \pm \frac{24,33}{3}p$$

$$\text{Главные напряжения } \sigma_1 = 6,78p; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -9,44p; \quad \sigma_{ЭКВ} = 16,2p;$$

$$\text{Для наружных точек Т.2)} \quad \sigma_{гд} = -\frac{5}{6}p \pm p \sqrt{\frac{25}{36} + 256} = -\frac{5}{6}p \pm \frac{96,13}{6}p;$$

$$\text{Главные напряжения } \sigma_1 = -15,18p; \quad \sigma_2 = -p; \quad \sigma_3 = -16,86p; \quad \sigma_{ЭКВ} = 32p;$$

Напряженное состояние в точке 2 опаснее. т.к. у нее эквивалентное напряжение больше, чем у внутренних точках (точка 1).

Из условия прочности определяем допустимое значение давления.

$$\sigma_{ЭКВ} = [\sigma]; \quad 32p = 200; \quad [p] = 6,25 \text{ МПа}$$

Глава 5 Устойчивость продольно сжатых стержней.

Явление потери устойчивости инженерных конструкций или их элементов в реальных условиях происходит под воздействием различных причин. Это явление влечет за собой переход объекта в новое равновесное состояние, или к изменению его первоначальной формы или к началу незатухающих колебаний. В проблеме потери устойчивости речь идет естественно о больших перемещениях.

Для анализа явления потери устойчивости необходимо выбрать расчетную схему. Основной, ставшей уже классической, является схема продольного сжатия идеально прямого стержня.

Если при продольном сжатии стержень отклонился от первоначального состояния равновесия, а после снятия нагрузки вернулся к нему, то такое состояние называется устойчивым. Если же стержень не возвращается к первоначальному состоянию, то его состояние было неустойчиво.

Условия, вызывающие переход стержня из одного равновесного состояния в другое называются критическими, а нагрузки, вызывающие потерю устойчивости называются критическими силами.

1. Задача Эйлера

Допустим что, шарнирно опертый стержень (рис.40а), при некотором значении сжимающей силы изогнулся. Определим величину этой силы - F_{KP} , при которой возможно новое равновесное состояние сжатого стержня.

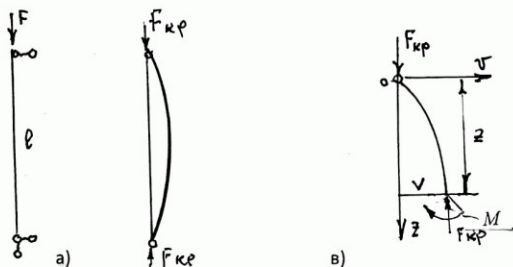


Рис.40

На рис. 40в приведена расчетная схема стержня.

Считая отклонения от первоначальной формы равновесия малыми, запишем уравнение изогнутой оси стержня $EJv'' = \pm M$; $EJv'' = -F_{KP}v$; (1)

Преобразуем выражение (1) $v'' + \alpha^2 v = 0$; где $\alpha^2 = \frac{F_{KP}}{EJ}$; (2) решая которое, получим зависимость, описывающую изменения прогиба стержня при его искривлении (2) $v = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z$;

A и B - константы, которые определяются из граничных условий (условий закрепления стержня) $z = 0$; $v = 0$; $z = l$; $v = 0$;

$z = 0$; $B = 0$; $z = l$; $A \sin \alpha l = 0$; $\alpha l = n\pi$;

Подставив α в выражение (2) получим значение критической силы $F_{KP} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$;



где n - количество полуволн, которые образует изогнутая ось сжатого стержня при потере устойчивости.

Для $n=1$ критическая сила равна $F_{KP} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}$;

Полученное значение критической силы наименьшее из всех возможных решений.

Практика показала, что при сжатии длинных стержней в большинстве случаев потеря устойчивости, происходит в плоскости минимальной жесткости.

2. Зависимость критической силы от условий закрепления сжатого стержня.

Коэффициент приведения длины.

Рассмотрим несколько примеров определения критической силы для приведенных ниже продольно сжатых стержней с различными условиями закрепления.

Пример 2

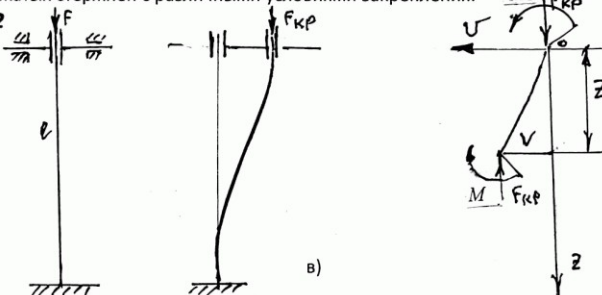


Рис.41-1 а)

в)

На рис. 41-1а изображен заданный стержень. На рис.41-1в - его расчетная схема.

Для написания уравнения изогнутой оси выберем начало координат в точке приложения силы, а ось прогибов направим так, чтобы прогибы были положительными.

Уравнение изогнутой оси стержня, в отличие от решения в примере 1, запишется в виде уравнения с правой частью

$$EJv'' = -F_{KP}v + M_0; \quad v'' + \alpha^2 v = \alpha^2 \frac{M_0}{F_{KP}}; \quad (3) \quad \text{где} \quad \alpha^2 = \frac{F_{KP}}{EJ}; \quad (3a)$$

Решая уравнение (3), получим уравнение прогибов

$$v = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + v_0;$$

где v_0 – частное решение уравнения с правой частью. Для нахождения частного решения зададим функцию прогибов в виде полинома второй степени, которая удовлетворяла бы

$$\text{уравнению (3)} \quad v_0 = az^2 + bz + c; \quad 2a + \alpha^2(az^2 + bz + c) = \alpha^2 \frac{M_0}{F_{KP}};$$

Сравнивая коэффициенты при z в левой и правой частях уравнения, получим

$$a = b = 0; \quad c \alpha^2 = \alpha^2 \frac{M_0}{F_{KP}};$$

$$\text{Окончательно уравнение прогибов примет вид} \quad v = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + \frac{M_0}{F_{KP}}; \quad (4)$$

Граничные условия

$$z = 0; \quad v = 0; \quad v' = 0; \quad v' = A \alpha \cos \alpha l - B \alpha \sin \alpha l;$$

$$z = l; \quad v' = 0;$$

Подставив граничные условия в уравнение (4) получим

$$A = 0; \quad B = -\frac{M_0}{F_{KP}}; \quad -B \alpha \sin \alpha l = 0; \quad \alpha l = \pi;$$

$$\text{Из выражения (3a) следует, что} \quad F_{KP} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}; \quad \text{т.е. } n = 1.$$

Пример 2а

Определить критические силы для приведенных ниже двух сжатых стержней (рис.42).

Из анализа расчетных схем становится очевидным, что уравнение изогнутой оси имеет тот же вид, что в примере 2, решение - аналогично решению в примере 2, и уравнение

$$\text{прогибов имеет тот же вид, что и уравнение (4).} \quad v = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + \frac{M_0}{F_{KP}};$$

Но величина критической силы отличается от результата решения в примере 4. Это объясняется тем, что граничные условия в рассматриваемых случаях, иные, чем в предыдущем примере.

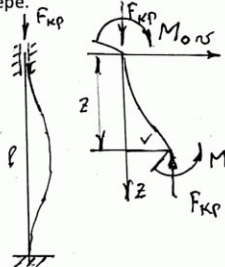


Рис.41-2

а)



б)

На рис.41-2 приведены два варианта сжатых стержней и их расчетные схемы.

Граничные условия для варианта на рис.41-2а

$$z = 0; \quad v = 0; \quad v' = 0; \quad v' = A\alpha \cos \alpha l - B\alpha \sin \alpha l;$$

$$z = l; \quad v = 0; \quad v' = 0;$$

Подставляя граничные условия в полученное выше уравнение (4) получим

$$A = 0; \quad B = -\frac{M_0}{F_{KP}}; \quad \cos \alpha l = +1; \quad \sin \alpha l = 0;$$

$$\text{Откуда } \alpha l = 2\pi; \quad F_{KP} = \frac{(2\pi)^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \quad \mu = \frac{1}{n}; \quad \mu = \frac{1}{2};$$

μ - коэффициент приведения длины, который показывает во сколько раз надо изменить длину сжатого стержня, чтобы привести задачу определения критической силы к задаче Эйлера.

μl - приведенная длина стержня.

Граничные условия для варианта на рис.41-2в

$$z = 0; \quad v = 0; \quad v' = 0;$$

$$z = l; \quad v = f_0; \quad \text{Тогда } M_0 = f_0 l;$$

Уравнение (4) примет вид $v = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + f_0$;

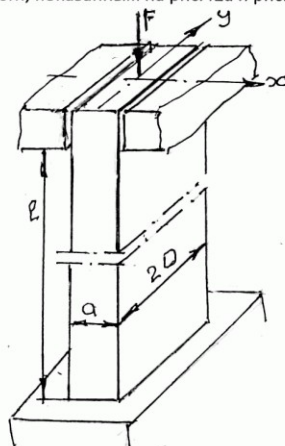
$$A = 0; \quad B = -f_0;$$

$$f_0 = B \cos \alpha l + f_0; \quad \cos \alpha l = 0; \quad \alpha l = \frac{\pi}{2}; \quad F_{KP} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}; \quad \mu = 2;$$

Анализ полученных результатов показывает, что величина критической силы напрямую зависит от условий закрепления продольно сжатого стержня.

Пример 3

Верхнее сечение стержня, приведенного на рис.42, закреплено так, что потеря устойчивости, при его сжатии центрально приложенной силой, происходит по разному сценарию. Определить критические силы, соответствующие различным вариантам потери устойчивости, показанным на рис.42а и рис.42в



$$l \gg a$$

$$\mu = \frac{1}{2}$$

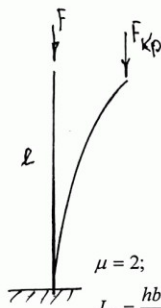
$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{6}a^4;$$

$$F_{kp} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\frac{1}{2}l)^2} = \frac{2\pi^2 Ea^4}{3l^2};$$

Рис.42



а)



$$\mu = 2;$$

$$J_x = \frac{hb^3}{12} = \frac{2}{3}a^4;$$

$$F_{kp} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 Ea^4}{6l^2};$$

в)

3. Энергетический метод определения критической силы

Энергетический метод определения критической силы для продольно сжатого стержня, является приближенным методом, точность которого зависит от того, как точно будет совпадать выбранное описание его изогнутой оси при потере устойчивости, с реальным.

Рассматривается случай упругой потери устойчивости, когда после снятия нагрузки, стержень возвращается в первоначальное равновесное состояние (рис. 43а).

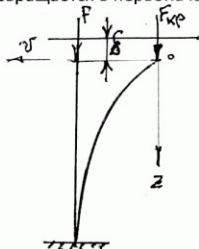
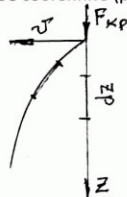
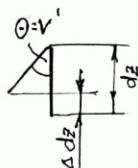


Рис.43 а)



б)



На рис.43а приведена схема заданного сжатого стержня, его расчетная схема и схема для определения приращения продольного перемещения точки приложения силы.

В основу метода положено равенство работы критической силы (F_{kp}) на перемещении точки ее приложения (δ) и потенциальной энергии, накопленной

изогнутым стержнем, при потере устойчивости. $W = F_{kp}\delta = U; F_{kp} = \frac{U}{\delta};$

Для стержней с постоянной жесткостью $U = \frac{EJ_{min}}{2} \int (v'')^2 dz;$

Элементарное приращение перемещения точки приложения силы (схема на рис.43в)

равно $d\delta = dz(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} \sin^2\theta dz \approx \frac{\theta^2}{2} dz = \frac{1}{2} (v')^2 dz;$

Перемещение точки приложения продольной силы $\delta = \frac{1}{2} \int (v')^2 dz$;

Критическая сила определяется из формулы (5.)

$$F_{кр} = \frac{U}{\delta} = \frac{EJ_{\min} \int (v'')^2 dz}{\int (v')^2 dz}; \quad (5)$$

Способы задания функции прогибов могут быть разными. Например, для шарнирно опертого стержня, который изгибается по кривой, близкой к синусоиде, подходит

функция прогибов - $v = C \sin \frac{\pi z}{l}$; В случае иных условий закрепления стержня, функцию

прогибов можно задать в виде параболы $v = Cz(l - z)$. Точность решения может быть увеличена, если в таком виде задать не функцию прогибов, а функцию моментов, т.е.

$$v'' = Cz(1 - z);$$

На практике часто, для описания формы изогнутой оси стержня при потере устойчивости, применяют полином n -ой степени, где n равно числу граничных условий или числу связей наложенных на стержень. Для оценки точности приближенного метода, определим значение критической силы в задаче Эйлера, используя один из описанных выше вариантов.

Запишем функцию момента так, чтобы в точках закрепления момент равнялся нулю

$$v'' = Cz(1 - z); \quad v' = C\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} + b\right); \text{ Константа } b - \text{ подбирается из условия, что}$$

$$v' - \text{ равно нулю посередине стержня. } v' = \frac{1}{12} C \left(-\frac{z^3}{3} + \frac{lz^2}{2} - l^3 \right);$$

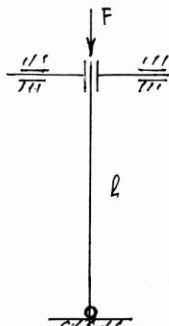
$$\text{Подставляя в формулу (5) получим } F_{кр} = \frac{168 EJ_{\min}}{17 l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(l)^2};$$

Значение коэффициента приведения длины, практически совпадает с результатом решения по Эйлеру.

Пример 4

Определим критическую силу и коэффициент приведения длины для ранее решенной задачи (Рис.41-2 стр.34), задав функцию прогиба в виде степенного полинома.

Начало координат выберем в нижней опоре



Граничные условия.

$$z = 0; \quad v = 0; \quad v'' = 0;$$

$$z = l; \quad v' = 0;$$

Полином, описывающий функцию прогибов, учитывая, что жесткость стержня постоянна

$$v = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$

$$v' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2$$

$$v'' = 2a_2 + 6a_3 z$$

Рис.44

Определим коэффициенты полинома из граничных условий

$$z=0; v=0; a_0=0; \quad z=l; v''=0; \quad a_2=0;$$

$$z=l; v'=0 \quad a_1=-3a_3l^2;$$

$$v''=6a_3z \quad \int_0^l (v'')^2 dz = 12a_3^2 l^3; \quad v'=-3a_3(l^2-z^2); \quad \int_0^l (v')^2 dz = \frac{72}{15} a_3^2 l^5; \text{ Подставляя}$$

полученные результаты в формулу (5), определим значение критической силы

$$F_{кр} = \frac{120 EJ_{\min}}{72} \frac{\pi^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}; \quad \text{где } \mu = 1,986;$$

Пример 5

Рассмотрим, как изменится величина критической силы, если в рассмотренном варианте стержня, сила будет приложена на расстоянии l_0 от начала координат (рис.45)

Отличие решения будет заключаться в том, что теперь критическая сила совершает работу на перемещении точки ее приложения (т.К), которое является результатом

искривления только участка **ОК**, т.е. $\delta = \int_0^{l_0} (v')^2 dz$

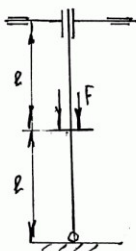


Рис.45

$$\text{Так же, как и в примере 4, } U = \frac{EJ_{\min}}{2} \int_0^l (v'')^2 dz = \frac{12a_3^2 l^3 EJ_{\min}}{2};$$

При определении перемещения точки приложения критической силы верхний предел

$$\text{интегрирования } l_0 = \frac{1}{2}l; \quad \delta = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} (v')^2 dz = \frac{1}{2} 9a_3^2 \left[l^4 z - \frac{2}{3} z^3 l^2 + \frac{z^5}{5} \right]_0^{l_0} = \frac{1}{2} \frac{1129}{32} a_3^2 l^5$$

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}; \quad \text{где } \mu^2 = \frac{12}{129} \frac{32}{\pi^2}; \quad \mu = 0,55;$$

Анализ результатов решения примеров 2, 3, 4, 5 показывает что:

1. Величина критической силы, т.е. значение коэффициента приведения длины на прямую зависит от условий закрепления стержня и места приложения критической силы.

2. Для определения тенденции поведения коэффициента приведения длины, для сжатых стержней, у которых смещается либо одна из опор, либо точка приложения силы надо определить его пограничные значения, например:

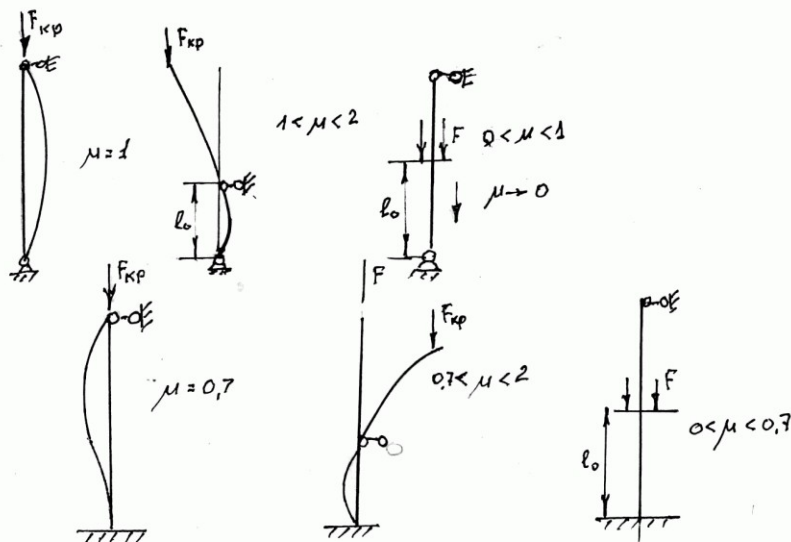


Рис.46

На рис.46 изображены схемы сжатых стержней, варианты расположения их опор и сжимающей силы. Определены, соответствующие каждому варианту, границы изменения коэффициента приведения длины.

4. Гибкость продольно сжатых стержней. Пределы применимости формулы Эйлера.

Напряжения в сжатом стержне до момента потери устойчивости определяются как отношение сжимающей силы к площади поперечного сечения. Наибольшего значения это напряжение достигает в момент, когда сила равна достигает своего критического значения

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \quad \sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2};$$

где $\frac{(\mu l)^2}{i^2} = \lambda^2$; - гибкость стержня. $i^2 = \frac{J}{A}$ - радиус инерции поперечного сечения.

Гибкость стержня равна отношению приведенной длины стержня к радиусу инерции.

Ниже приведена диаграмма зависимости критического напряжения от гибкости стержня. (рис.48)

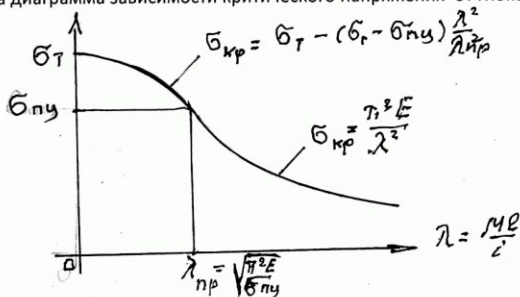


Рис.47.

Граница применимости формулы Эйлера определяется тем обстоятельством, что все предыдущие зависимости были получены из условия упругого деформирования стержня, поэтому граничным значением напряжения при сжатии стержня будет $\sigma_{\text{пл}}$ - предел пропорциональности, который ограничивает действие закона Гука.

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{пл}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\text{пр}}^2}; \quad \lambda_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пл}}}}$$

Из приведенной на рис.48 диаграммы следует, что при больших гибкостях упругих стержней их состояние становится неустойчивым. Например, для стальных стержней предельная гибкость равна 90 – 100, а при гибкостях порядка 200 стержень переходит в состояние неустойчивого равновесия.

При малых гибкостях в поперечном сечении сжатого стержня при потере устойчивости возникают пластические деформации, и критические напряжения определяются

$$\text{зависимостью } \sigma_{\text{кр}} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{\text{пл}}) \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{пр}}^2};$$

5. Расчет продольно сжатых стержней по коэффициенту понижения допускаемых напряжений

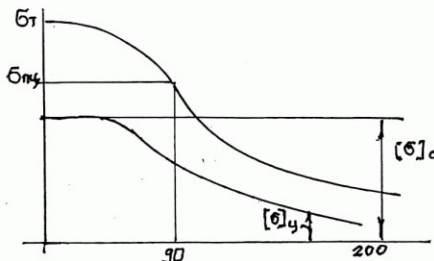


Рис.48

На диаграмме (рис.48) показаны: прямая допускаемых напряжений на простое сжатие $[\sigma]_c$, и кривая зависимости допускаемых по устойчивости напряжений $[\sigma]_y$ от гибкости стержня.

Очевидно что, допускаемое напряжение по устойчивости нелинейно зависит от гибкости и в φ раз меньше допускаемого напряжения при сжатии. $[\sigma]_y = \varphi[\sigma]_c$;

φ - коэффициент понижения допускаемых напряжений нелинейно зависит от гибкости, а его значения для машиностроительных материалов приведены в справочной литературе в разделе устойчивости.

Этот расчет применяют на стадии эскизного проектирования инженерного объекта, чтобы предварительно ориентировочно определить не только прочные, но и устойчивые размеры поперечного сечения его сжатых стержневых элементов..

Примечание: Потеря устойчивости длинных стержней в гидравлическом приводе, в гидравлических агрегатах самолетов, ракет, при эксплуатации гидравлического оборудования на производстве, опорных конструкций и т.д. приводят к необратимым разрушениям и к гибели людей.

Чтобы определить прочный и устойчивый размеры поперечного сечения сжатого стержня, необходимо: во-первых, из условия прочности определить минимально возможные размеры его поперечного сечения, а во-вторых, подобрать размеры,

обеспечивающие устойчивость стержня при продольном сжатии. Подбор ведется из условия, что сохранение упругих свойств в стержне происходит при допускаемом по устойчивости значении сжимающей силы в диапазоне значений его гибкости от $\lambda_{пр}$ до $1,5\lambda_{пр}$. При этом, допускаемая по устойчивости нагрузка не должна превышать заданных эксплуатационных значений.

Пример 6

Для стержня, изображенного на рис.50а подобрать размер стандартного уголка, обеспечивающий прочность и устойчивость стержня.

Дано : $F=200 \text{ кН}$, $l = 3 \text{ м}$, $[\sigma]_y = 200 \text{ МПа}$;

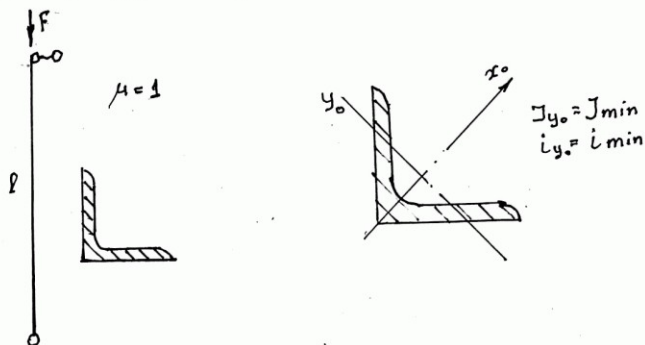


Рис.50 а)

в)

На рис.50в изображено поперечное сечение стержня по Гост - равнобокий уголок. Подбор минимально возможного размера поперечного сечения из условия прочности

$$[\sigma]_c = \frac{F}{A}; \quad A_{\min} = \frac{F}{[\sigma]_c} = \frac{1000 \text{ кН}}{200 \text{ МПа}} = 5000 \text{ мм}^2 = 50 \text{ см}^2 \quad \text{По Гост это уголок } \angle 80 \times 7$$

Гибкость стержня равна отношению приведенной длины стержня к минимальному радиусу инерции $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \times 3000}{i} = \frac{3000}{i}$; (а) $\lambda_{пр} = 90 \div 100$ - для металлов.

Расчетное значение гибкости лежит в интервале от $90 \div 150$. При этих значениях гибкости теоретически происходит упругая потеря устойчивости, то есть при устранении причины потери устойчивости, стержень возвращается к первоначальному состоянию. Определим диапазон значений допускаемой по устойчивости нагрузки. Из условия, что допускаемая по устойчивости нагрузка не должна превышать заданного значения $[F]_y \leq 200 \text{ кН}$ определяем номера уголков, соответствующих крайним значениям гибкости. Для этого из справочной таблицы $\lambda - \varphi$, для заданных значений λ определяем значения коэффициента приведения длины. Затем, из зависимости (а) определяем радиусы инерции, зная которые, по таблицы по Гост подбираем номера уголков.

$$[F]_y = \varphi [\sigma] A; \quad 1) \quad \lambda = 90; \quad \varphi = 0,69; \quad i = 3,33 \text{ см} \quad \angle 160 \times 10 \quad A = 34,40 \text{ см}^2$$

$$2) \quad \lambda = 150; \quad \varphi = 0,36; \quad i = 2,0 \text{ см} \quad \angle 110 \times 8 \quad A = 17,20 \text{ см}^2$$

Вычислив пограничные значения допускаемой силы, делаем с помощью подбора окончательный выбор размера поперечного сечения и определим критическую силу.

$$[F]_y = 0,69 \times 200 \times 3440 = 474 \text{ кН}. \quad [F]_y = 0,36 \times 200 \times 1720 = 123, \text{ кН};$$

Выберем номер уголка в уже определенном диапазоне, например, $\angle 140 \times 10$; площадь которого $A = 27,3 \text{ см}^2$. В качестве проверки определим допускаемую по устойчивости нагрузку $\lambda = \frac{3000}{28,7} = 105$; $\varphi = 0,574$; $[F] = 0,574 \times 200 \times 2730 = 313 \text{ кН}$;

(Слишком большая). Подберем другой уголок с меньшими геометрическими характеристиками.

Для уголка $\angle 125 \times 10$; $A = 24,3 \text{ см}^2$; $\lambda = 123$; $\varphi = 0,715$; $J_{y_0}^{\text{ГОСТ}} = 149 \text{ см}^4$
 $[F]_y = 0,485 \times 200 \times 2430 = 235 \text{ кН}$; этот номер подходит по всем параметрам.

Запас устойчивости стержня $n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{331}{200} = 1,55$

$$\text{где } F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 2 \times 10^5 \times 149 \times 10^4}{(1 \times 3000)^2} = 331 \text{ кН}$$

Примечание:

Для сжатых стержней, у которых коэффициент приведения длины близок к 2 а гибкость стремится к 200, разница размеров, полученных из условия прочности и из условия устойчивости настолько велика, что с точки зрения инженерной практики, у такой конструкции стержня надо изменять условия закрепления стержня таким образом, чтобы отклонения от первоначальной формы равновесия при потере устойчивости были минимальны.

6. Продольно - поперечный изгиб прямого стержня.

При совместном действии продольных и поперечных сил принцип независимого действия сил не применим, т.к. продольные силы работают на перемещениях от поперечных сил.

На рис.49 изображена схема нагружения консольного стержня продольной и поперечной силой.

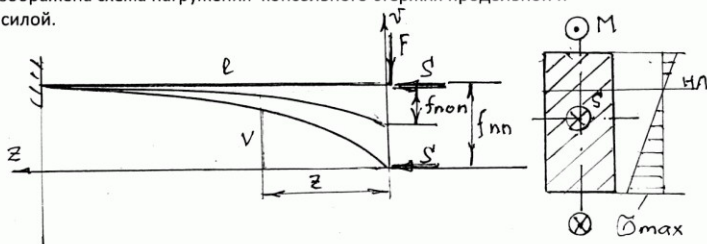


Рис.49

Максимальный изгибающий момент в закрепленном сечении равен $M_{nn} = Fl + Sf_{nn}$;

Напряжение в опасном сечении, в его нижних точках, будет сжимающим и равно

$$\sigma_{nn} = \frac{M_{nn}}{w_x} + \frac{S}{A} = - \left(\frac{Fl + Sf_{nn}}{w_x} + \frac{S}{A} \right);$$

Очевидно, что для расчета на прочность необходимо знать величину f_{nn} - прогиба при продольно - поперечном изгибе.

Определение прогиба f_{nn} интегрированием уравнения изогнутой оси.

В выбранной системе координат уравнение изогнутой оси примет вид (рис.49)

$$EJ_x v'' = -Fz - Sv; \quad (1a)$$

Так же как в задачах устойчивости, решим это уравнение

$$v'' + \alpha^2 v = -\alpha^2 \frac{F}{S}; \quad \alpha^2 = \frac{S}{EJ_x}; \quad v = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z - \frac{Fz}{S};$$

Граничные условия:

$$z = 0; \quad v = 0; \quad B = 0;$$

$$z = l; \quad v' = 0; \quad A = \frac{F}{S \alpha \cos \alpha l}; \quad z = l; \quad v = f_{\text{пп}};$$

$$f_{\text{пп}} = \frac{F}{\alpha S} \operatorname{tg} \alpha l - \frac{Fl}{S} = \frac{F}{\alpha S} (\operatorname{tg} \alpha l - \alpha l);$$

Продольно – поперечный прогиб ($f_{\text{пп}}$) в полученном выражении при заданных параметрах сечения и внешней нагрузке легко вычисляем. Но при расчетах на прочность и жесткость в реальных задачах с более сложными условиями закрепления и схемами нагружения, этот метод решения становится трудоемким и не рациональным. Поэтому прибегают к менее точным методам определения прогиба при продольно-поперечном изгибе, но более простым.

7. Приближенный метод определения прогиба при продольно-поперечном изгибе стержня.

Обратимся к уравнению моментов (1a) в параграфе 6.

$$EJ_{\text{пп}}'' = M_{\text{поп}} - Sv; \quad \text{где } M_{\text{поп}} = EJ_{\text{поп}}''.$$

Приняв форму изогнутой оси за синусоиду, т.е. задав функцию прогиба - $v = f \sin \frac{\pi z}{l}$,

$$\text{запишем уравнение (1a) в виде } -EJ_{\text{пп}} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} = -EJ_{\text{поп}} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} - S \sin \frac{\pi z}{l} f_{\text{го}};$$

$$\text{сократив на } \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \text{получим } EJ_{\text{пп}} = EJ_{\text{поп}} - S f_{\text{пп}};$$

где $f_{\text{пп}}$ - прогиб при совместном действии продольных и поперечных сил,

$f_{\text{поп}}$ - прогиб только от поперечных сил.

$$\text{Прогиб при совместном действии поперечных и продольных сил равен } f_{\text{пп}} = \frac{f_{\text{поп}}}{1 - \frac{S}{S_{\text{эл}}}};$$

Где $S_{\text{эл}}$ - это критическое значение продольной силы, когда плоскость действия поперечного изгиба совпадает с плоскостью потери устойчивости, т.е. $S_{\text{эл}} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2}$ где

J_x - момент инерции заданного сечения относительно оси X, в плоскости действия поперечного изгиба.

Глава 6 Расчет элементов конструкций при напряжениях переменных во времени

Многие детали машин при эксплуатации испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. Например, вращающиеся валы редукторов, коробки скоростей, клапанные пружины и т.д. Прочность деталей при таком виде нагружения называется выносливостью или усталостной прочностью. При переменных напряжениях в материале последовательно, на микро уровне возникают пластические деформации противоположных знаков. В итоге этих деформаций в структуре материала образуются микротрещины, которые при дальнейшем нагружении увеличиваются и подобно ручейкам воды сливаются, образуя большую трещину, которая ослабляет сечение. Чем быстрее растет трещина, тем скорее наступает разрушение.

Проблемы усталостного разрушения появились с развитием техники, с появлением быстро вращающихся деталей. Особенно остро они проявились при эксплуатации подвижного состава первых поездов, когда оси вагонных колес, при невысоких напряжениях, вдруг растрескивались в продольном направлении, тогда же это явление получило название – «усталости». Позднее, в авиации, когда, особенно в условиях флаттера, у самолетов отваливались крылья или самолеты теряли обшивку из-за разрушения заклепок и т.д. Многочисленные экспериментальные исследования и эксплуатационная практика позволили, несмотря на отсутствие стройной теории усталостного разрушения в механике сплошной среды, создать теорию сопротивления усталости.

Рассмотрим основные понятия, используемые при определении запаса усталостной прочности. На рис.53а изображено поперечное сечение вращающегося вала, работающего в условиях изгиба и график изменения напряжений по времени в некоторой точке А поперечного сечения вала при его вращении (рис.53в).

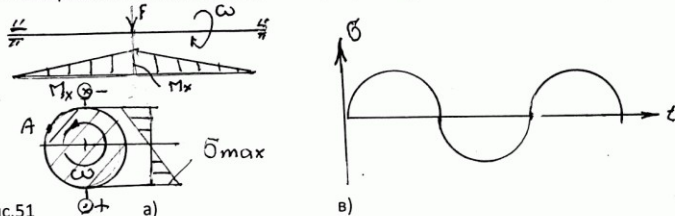
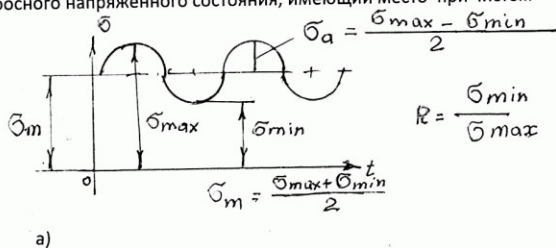


Рис.51

При вращении вала, точка А последовательно проходит положения, в которых напряжения меняют знак или равны нулю, как показано на диаграмме рис.53в.

1. Основные характеристики циклов

Рассмотрим случай одноосного напряженного состояния, имеющий место при чистом изгибе вала.



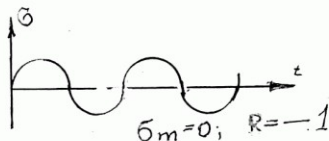


Рис.52

в)

с)

Рис.52а – асимметричный цикл, рис.52в- симметричный цикл, рис.52с ($\sigma_m = 0$; $R = -1$;) пульсационный цикл ($\sigma_m = \sigma_a$; $R = 0$;) . На (Рис.52а) изображен цикл у которого, σ_{max} - наибольшее, а σ_{min} - наименьшее напряжения цикла.

Основными характеристиками циклов являются: среднее напряжение цикла - σ_m , амплитудная составляющая - σ_a и отношение минимального напряжения к максимальному напряжению цикла R , которое называется коэффициентом асимметрии цикла $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$; (σ_{max} и σ_{min} в алгебраическом смысле)

Среднее напряжение цикла определяется как $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$;

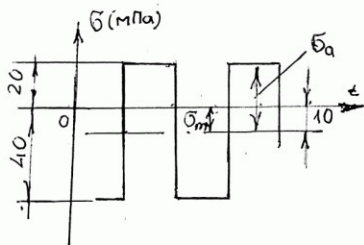
Амплитуда цикла - $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

Процесс образования трещин при переменных напряжениях связан с особенностями микроструктуры материалов, и с накоплением дислокаций.

Он зависит только от величин наибольшего и наименьшего напряжений цикла, а не от закона изменения напряжений внутри цикла.

Пример 1

Для изображенного на рис.53 режима изменения нормальных напряжений определить основные характеристики циклов.



Среднее напряжение цикла

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{20 + (-40)}{2} = -10 \text{ МПа}$$

Амплитуда цикла

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{20 - (-40)}{2} = 30 \text{ МПа}$$

2. Предел выносливости

Предел выносливости это максимальное напряжение цикла, при котором материал, не разрушаясь, выдерживает базовое число циклов нагружения - N_b .

$N = 10^7$ циклов - для черных металлов

$N = 10^8$ циклов - для цветных металлов

Предельным значением амплитуды при симметричном цикле является предел выносливости σ_{-1} .

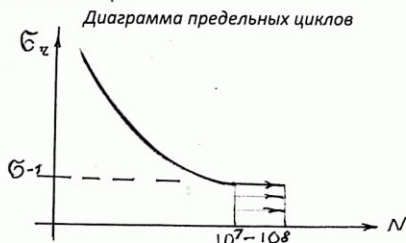


Рис.53

Эта диаграмма построена по итогам статистической обработки многочисленных результатов испытаний образцов на выносливость.

Таблица 1

Материал	σ_{TP} МПа	σ_{BP} МПа	σ_{-1} МПа
Сталь мал.углер	180	320-420	160-220
Сталь 30	280	430-600	200-270
Сталь 30ХГСА	1500	600-750	250-340
Чугун	-	210	100
Алюминий	35-176	100-190	40-70
Органич.стекло	-	75	20-25

В таблице 1 приведены основные механические характеристики некоторых материалов.

3. Диаграмма предельных амплитуд. Запас выносливости

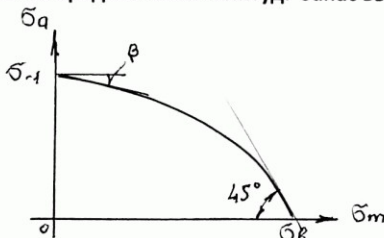


Рис. 53

На рис.53 приведен общий вид диаграммы предельных амплитуд, полученный экспериментально.

Чтобы получить подобную диаграмму для каждого машиностроительного материала, необходимо испытать миллионы дорогостоящих образцов и затратить огромное количество времени.

Поэтому в инженерной практике используют упрощенный вариант диаграммы, для построения которой, необходимо знать основные механические характеристики

$$n = \frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{od}} = \frac{\sigma_{a, np}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{m, np}}{\sigma_m}; \quad \text{где } \sigma_{a, np} = n \cdot \sigma_a; \sigma_{m, np} = n \cdot \sigma_m;$$

Из диаграммы (Рис.57)

$$\begin{aligned} \sigma_{a, np} &= \sigma_{-1} - \sigma_{m, np} \cdot \lg \beta; \\ \sigma_{a, n} &= \sigma_{-1} - \sigma_m \cdot n \cdot \psi_\sigma; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Где } \psi_\sigma = \lg \beta = \frac{\frac{\sigma_{-1} - \sigma_0}{2}}{\frac{\sigma_0}{2}} = 2 \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} - 1;$$

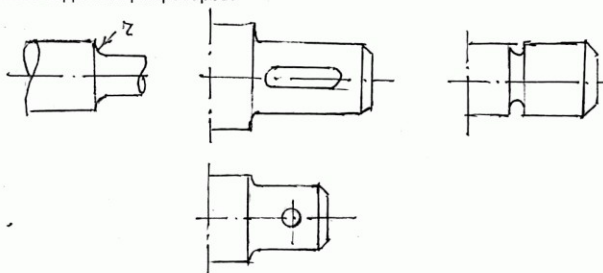
Запас выносливости для гладких полированных деталей из уравнений (1) равен

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \quad (2)$$

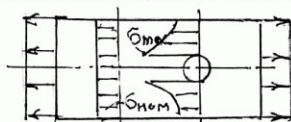
4. Влияние различных технологических и конструктивных факторов на запас выносливости.

1. Влияние концентрации напряжений

Различные виды концентраторов:



а) Номинальный коэффициент концентрации напряжений равен отношению максимального напряжения к номинальному напряжению

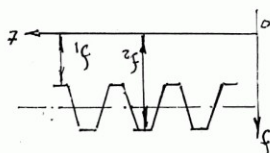


$$\alpha = \frac{\sigma_{MAX}}{\sigma_{НОМ}};$$

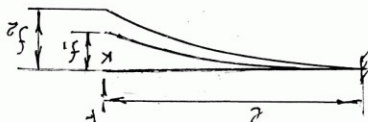
в) Теоретический коэффициент концентрации напряжений $K_\sigma = 1 + q(\alpha - 1)$;
где q - коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений,
 α - номинальный коэффициент концентрации напряжений

с) Эффективный коэффициент концентрации напряжений K_{-1} - равен отношению предела выносливости гладкой детали к пределу выносливости образца с данным видом концентратора напряжений.

$$K_{-1} = \frac{\sigma_{-1 \text{ гладкой детали}}}{\sigma_{-1 \text{ образца с концентратором}}} \geq 1;$$



в)



а) РИС.4

Определить запас прочности и запас выносливости пластинчатой пружины (рис.3а), работающей в указанном режиме. (рис.3б).

Пример 2

данных.

Эта формула является результатом статистической обработки экспериментальных

соотношения

$$\frac{n_2}{1} = \frac{n_2^a}{1} + \frac{n_2^z}{1}$$

Запас выносливости при совместном действии изгиба с кручением определяется из

влияния также приводятся в справочной литературе.

Примечание: При работе деталей в условиях переменных во времени касательных напряжений, коэффициент выносливости определяется аналогично коэффициенту

$$n_t = \frac{K_t \sigma^a + \psi_t \tau^a}{\tau^a} \quad \text{напряжений запас выносливости равен}$$

Для деталей, работающих в условиях переменных во времени касательных

$$n_o = \frac{K_o \sigma^a + \psi_o \tau^a}{\sigma^a} \quad \text{напряжений запас выносливости равен}$$

Для деталей, работающих в условиях переменных во времени нормальных

запас выносливости равен

С учетом коэффициента влияния различных факторов на амплитудную составляющую,

$$K_o = \left(\frac{K}{K_1} + 1 \right) \frac{1}{b} \quad \text{величину запаса выносливости определяется как}$$

Общий коэффициент влияния технологических и конструктивных факторов на

значения всех указанных коэффициентов приводятся в справочной литературе.

$$b_y = \frac{\sigma^{-1} \sigma^a}{\sigma^{-1} \sigma^a} \geq 1;$$

нагрузка, химическая обработка и т.д.

6. Влияние специальных методов обработки поверхности деталей: накатка,

$$b_f = \frac{\sigma^{-1} \sigma^a}{\sigma^{-1} \sigma^a} \leq 1;$$

детали к пределу выносливости образца, диаметром ϕ мм

3. Влияние размеров детали определяется отношением предела выносливости

$$z = \frac{\sigma^{-1} - \sigma^a}{\sigma^{-1} - \sigma^a} \leq 1;$$

2. Влияние чистоты обработки поверхности определяется отношением предела выносливости детали к пределу выносливости полированного образца

Рис.4.Схема работы пластинчатой пружины (рис.4 а) и график изменения прогибов в т.К .

При работе, прогибы конца пружины изменяются во времени, как показано на (Рис.4в). Определим величину прогиба конца пружины, считая, что причиной прогибов является переменная сила F_i (Рис.4а).

$$f_i = \frac{F_i l^3}{3EI}; \quad \sigma_i = \frac{F_i l}{w_x} = \frac{3EIx}{l^2 w_x} f_i = \frac{3Eh}{2l^2} f_i;$$

$$\text{где} \quad \frac{Ix}{w_x} = \frac{h}{2};$$

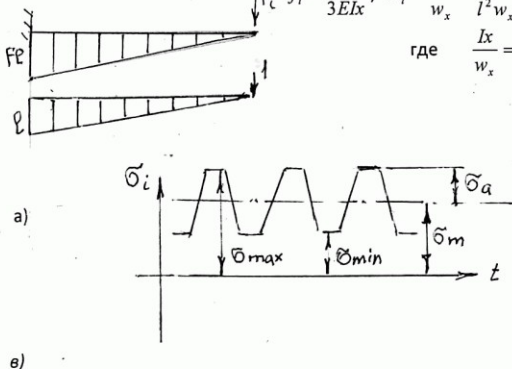


Рис.5

На рис.5 показано определения прогиба в т. К с помощью правила Верещагина (рис.5 а) и график изменения напряжений по времени(рис.5 в)

Закономерность изменения силы, изгибающего момента, а ,следовательно, и напряжений идентична графику изменения прогибов. (Рис.5в)

Запас выносливости равен

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m};$$

$$\text{Где: } \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{3Eh}{2l^2} (f_2 - f_1); \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{3Eh}{l^2} (f_2 + f_1);$$

Коэффициенты влияния различных факторов на предел выносливости приводятся в справочной литературе, для каждого конкретно вида пружин. Для рассматриваемого случая коэффициент влияния близок к единице.

Запас прочности равен отношению предела текучести к максимальному напряжению цикла

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\frac{3Eh}{l^2} f_2};$$